Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Sláma

# Pythagorejské trojúhelníky

# Pythagorean triangles

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice, Matematika se zaměřením na vzdělávání — Informační technologie se zaměřením na vzdělávání

2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Pythagorejské trojúhelníky vypracoval pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 9.4.2015 Michal Sláma

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D., za jeho cenné rady, trpělivost při vedení mé bakalářské práce a za vstřícnost a pomoc při získání potřebných informací a podkladů.

V Praze dne 9.4.2015 Michal Sláma

**Název:** Pythagorejské trojúhelníky

**Autor:** Michal Sláma

**Katedra:** Katedra matematiky a didaktiky matematiky

**Vedoucí bakalářské práce:** RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

**Abstrakt:** Práce se zabývá praktickými úlohami s pythagorejskými trojúhelníky. V první části se věnuje různým druhům odvození parametrizací pythagorejských trojúhelníků. Další části se věnují odvození vlastností délek stran a poloměrů vepsaných a připsaných kružnic v nich. V závěru se pomocí Heronovských trojúhelníků a rozkladů na pythagorejské trojúhelníky částečně řeší úloha o pythagorejském nebo Heronovském trojúhelníku, kde všechny výšky jsou celá čísla. V poslední části práce jsou poskytnuty seznamy pythagorejských a Heronovskýchh trojúhelníků, které mohou být využity k tvorbě školních úloh.

**Klíčová slova:** Pythagorejské trojúhelníky, Heronovské trojúhelníky, vepsané a připsané kružnice, celočíselné výšky

**Title:** Pythagorean triangles

**Author:** Michal Sláma

**Department:** Department of mathematics and mathematical education

**Supervisor:** RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

**Abstract:** The thesis considers usable problems concerning pythagorean triangles. In the first part, there is described an expression of a parametrization of pythagorean triangles. Next parts are dedicated to an expression of properties of edges and radii of the incircle and excircles. Next chapters describe Heronian triangles and their decomposition to pythagorean triangles, as a way to solution of the problem of a Heronian triangle where all heights are integer numbers. In addition are given some examples of triangles for school practice.

**Keywords:** Pythagorean triangles, Heronian triangles, incircle and excircles, triangle heights as integer numbers

# Obsah

# Seznam obrázků

# Seznam příloh

# Úvod

Při výběru tématu a následné práci jsem vycházel ze své praxe učitele. Ačkoliv jsou pythagorejské trojúhelníky jako téma dobře prozkoumané a popsané jak z hlediska historického, tak z pohledu didaktického, často narážím na drobné nedostatky při hledání a tvorbě materiálů k přípravě hodin, kde pythagorejské trojúhelníky jsou vedlejším tématem. Cílem práce je proto zaměřit se na vlastnosti pythagorejských trojúhelníků, které mohou být užitečné pro tvorbu úloh pro druhý stupeň základní školy, ať už v geometrii při rýsování výšek a výpočtu obsahů, nebo v aritmetice v úlohách souvisejících s Pythagorovou větou. Dalším cílem je vytvořit seznam trojúhelníků s celočíselnými výškami, kde by rýsování a následný počet obsahu závisel méně na přesnosti a výšce zvolené pro výpočet.

V úvodní kapitole se budu zabývat možnostmi, jak pythagorejský trojúhelník popsat, parametrizovat a generovat, aby se proces hledání trojúhelníků s požadovanými vlastnostmi dal automatizovat. V kapitole 2 popíšu vlastnosti stran pythagorejského trojúhelníka, kapitola 3 se soustředí na výsledky spjaté s obvody a obsahy pythagorejských trojúhelníků. V kapitole 4 ukážu, jaký je vztah mezi pythagorejským trojúhelníkem a poloměry kružnic vepsané a připsaných. Kapitola 5 se věnuje otázce, kolik existuje pythagorejských trojúhelníků splňujících určité vlastnosti. Kapitola 6 o Heronovských trojúhelnících na pythagorejské trojúhelníky přirozeně navazuje a navrhuje, jak požadované trojúhelníky hledat. Poslední kapitola 7 potom prezentuje nalezená řešení úlohy o trojúhelníku s celočíselnými stranami a výškami, který lze narýsovat na papír rozměru A3. V přílohách jsou k nalezení tabulky s trojúhelníky použitelnými i při jiných příležitostech.

# Kapitola 1

# Popis a generování

Studium pravoúhlých trojúhelníků a jejich vlastností se datuje již do dob starověkého Egypta nebo Číny, i když evropský náhled ovlivnila kultura starého Řecka, kde byla Pythagorova věta pravděpodobně poprvé dokázána (viz. [21]). Cílem této práce je studium pravoúhlých trojúhelníků s přirozenými délkami stran, které se nazývají pythagorejské. Základním problémem, se kterým se setkáváme, jsou metody generování těchto trojúhelníků. V této kapitole se budeme věnovat různým metodám reprezentace pythagorejských trojúhelníků, které umožňují jednodušší způsob generovaní pythagorejských trojúhelníků, a sice klasické značení, nedostatko-přebytkové značení a popis pomocí maticového stromu. Každá z předvedených možností má také výhody v přehlednosti nebo struktuře proti prostému popisu pomocí délek stran. Předložené metody zápisu v této kapitole nepředstavují kompletní výčet, ale pro účely této práce jsou postačující.

## 1.1 Základní definice

**Definice 1.1.** Trojice přirozených čísel $x, y$ a $z$ řešící rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ se nazývá *pythagorejská*.

Pythagorejskou trojici budeme značit $(x, y, z)$. Z definice pythagorejské trojice vyplývá, že $x, y$ a $z$ odpovídají délkám stran pravoúhlého trojúhelníka. Takový trojúhelník budeme nazývat pythagorejský a vzhledem k jednoznačnosti vztahu mezi pythagorejskou trojicí a pythagorejským trojúhelníkem budeme pro oba pojmy používat totožné značení $(x, y, z)$.

**Lemma 1.2.** *Pro každou pythagorejskou trojici $(x, y, z)$ existuje právě jeden pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou určeny přirozenými čísly $x, y$ a $z$.*

*Důkaz.* Nejprve ověříme trojúhelníkové nerovnosti. Z přirozenosti čísel $x, y$ a $z$ a vztahu $x^2 + y^2 = z^2$ dostáváme

- $2xy > 0 \Rightarrow z^2 + 2xy > z^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy > z^2 \Rightarrow (x + y)^2 > z^2 \Rightarrow x + y > z$,
- $2x^2+2xz > 0 \Rightarrow 2x^2+y^2+2xz > y^2 \Rightarrow x^2+z^2+2xz > y^2 \Rightarrow (x+z)^2 > y^2 \Rightarrow x+z > y$,
- $2y^2+2yz > 0 \Rightarrow 2y^2+x^2+2yz > x^2 \Rightarrow y^2+z^2+2yz > x^2 \Rightarrow (y+z)^2 > x^2 \Rightarrow y+z > x$.

Tím jsme dokázali, že přirozená čísla $x, y, z$ odpovídají délkám stran trojúhelníku a podle Pythagorovy věty je tento trojúhelník pravoúhlý, neboť délky stran splňují rovnici $x^2 + y^2 = z^2$. □

V pythagorejském trojúhelníku $(x, y, z)$ odpovídají $x$ a $y$ délkám odvěsen a $z$ délce přepony.

**Definice 1.3.** Pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$, kde $x$ a $y$ jsou nesoudělná čísla, se nazývá *primitivní.*

Z primitivního pythagorejského trojúhelníka $(x, y, z)$ se dá vytvořit nekonečně mnoho trojúhelníků vynásobením všech délek stran stejnou přirozenou konstantou, ale všechny tyto trojúhelníky budou větší a podobné původnímu.

**Lemma 1.4.** *Pro každý pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$ platí jedna z následujících možností:*

1. *$(x, y, z)$ tvoří primitivní pythagorejský trojúhelník*
2. *existuje primitivní trojúhelník $(x_1, y_1, z_1)$, který je trojúhelníku $(x, y, z)$ podobný. Tedy existuje přirozené číslo $d$ tak, že $x = dx_1, y = dy_1$ a $z = dz_1$.*

*Důkaz.* Důkaz lze najít např. v [24, s. 2]. V případě, že jsou $x$ a $y$ nesoudělné, je pythagorejský trojúhelník primitivní. V opačném případě existuje přirozené číslo $d > 1$, které je největším společným dělitelem $x$ a $y$, tj. lze psát $x = d\,x_1$ a $y = d\,y_1$, kde $x_1$ a $y_1$ jsou přirozená čísla. Potom ze vztahu

$$x^2 + y^2 = d^2x_1^2 + d^2y_1^2 = d^2(x_1^2 + y_1^2) = d^2z_1^2$$

vyplývá, že k trojúhelníku $(x, y, z)$ existuje menší podobný pythagorejský trojúhelník $(x_1, y_1, z_1)$, který vznikl vydělením stran konstantou $d$. Vzhledem k tomu, že $d$ je největším společným dělitelem $x$ a $y$, jsou $x_1$ a $y_1$ nesoudělné a $(x_1, y_1, z_1)$ je primitivní. □

## 1.2 Klasický zápis pythagorejského trojúhelníka

V této části zavedeme zápis trojúhelníka pomocí dvou nesoudělných přirozených čísel. Tento způsob zápisu se datuje až do časů starého Řecka a Euklida (viz. [14, Kniha X, Věta XXIX]) a v literatuře ([24, Kap. 2], [6], [12], [13]) se označuje jako klasický.

**Věta 1.5.** *Každý primitivní pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$, kde $y$ je sudé číslo, se dá zapsat ve tvaru*

$$x = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn, \qquad z = m^2 + n^2, \tag{1.1}$$

*kde $m$ a $n$ jsou nesoudělná přirozená čísla, $m > n$.*

*Důkaz.* Z předpokladu, že $(x, y, z)$ je primitivní a $y$ je sudé, vyplývá, že $x$ musí být liché (nesoudělnost s $y$). Odtud dále vyplývá, že $z$ je také liché číslo. Pythagorejská rovnice se dá použitím vzorce pro rozdíl čtverců přepsat do tvaru

$$y^2 = (z - x)(z + x). \tag{1.2}$$

Potom čísla $z - x$ a $z + x$, protože jsou součtem a rozdílem lichých čísel, musejí být sudá. Označme tedy

$$z + x = 2a, \qquad z - x = 2b, \tag{1.3}$$

kde $a$ a $b$ jsou přirozená čísla. Současně platí $a > b$. Následně po úpravě máme

$$z = a + b, \qquad x = a - b.$$

Nechť $a$ i $b$ mají společného dělitele $d > 1$. Potom platí, že $d|x$ a $d|z$, a odtud již $d^2|y^2$. Protože $(x, y, z)$ je primitivní trojúhelník, jsou čísla $x$, $y$ a $z$ nesoudělná; což je spor s předpokladem. Čísla $a$ a $b$ tudíž musí být nesoudělná.

Protože $y$ bylo zvoleno jako sudé číslo, můžeme označit

$$y = 2c. \tag{1.4}$$

Potom kombinací rovností (1.2), (1.3) a (1.4) a vydělením čtyřmi získáme vztah

$$c^2 = ab.$$

Součin nesoudělných čísel $ab$ tvoří druhou mocninu právě tehdy, když jsou $a$ i $b$ druhými mocninami. Existují tedy přirozená nesoudělná čísla $m, n$, kde $m > n$, pro která platí

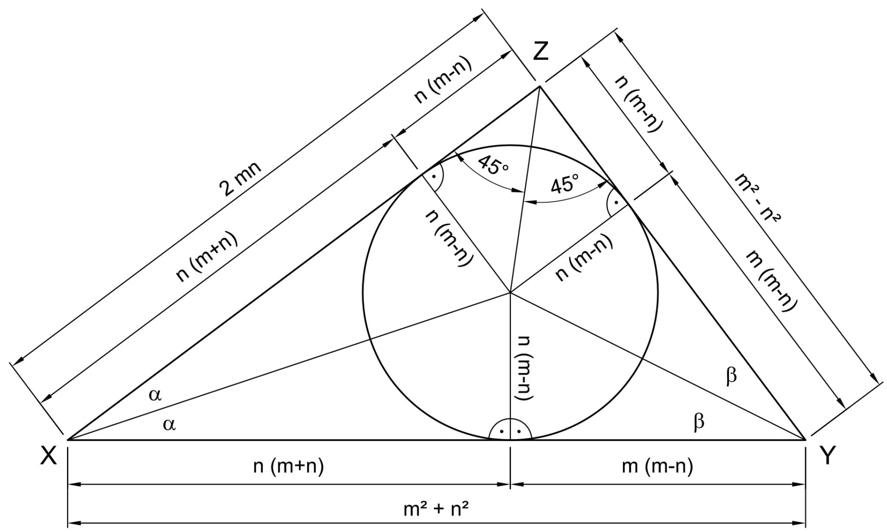
$$a = m^2, \qquad b = n^2, \qquad c = mn.$$

Po dosazení zpět a vyjádření délek stran původního trojúhelníka dostáváme vztahy (1.1). □

**Lemma 1.6.** *Mějme primitivní trojúhelník* $(x, y, z)$ *v klasickém zápisu* (1.1)*. Potom mají čísla* $m$ *a* $n$ *odlišnou paritu, tj. jedno je sudé a druhé je liché.*

*Důkaz.* Protože $m$ a $n$ jsou nesoudělná čísla, nemohou být obě sudá. Nemohou být ani obě lichá, protože by $x$ jako rozdíl dvou lichých čísel muselo být sudé. □

Tento zápis délek stran pythagorejského trojúhelníku pomocí dvou nesoudělných přirozených čísel $m$ a $n$, kde $m > n$, lze graficky znázornit pomocí obrázku 1.1. Generovat podle něj seznamy trojúhelníků je jednodušší než prostá iterace všech možných stran, takže má použití i při tvorbě tabulek a seznamů.



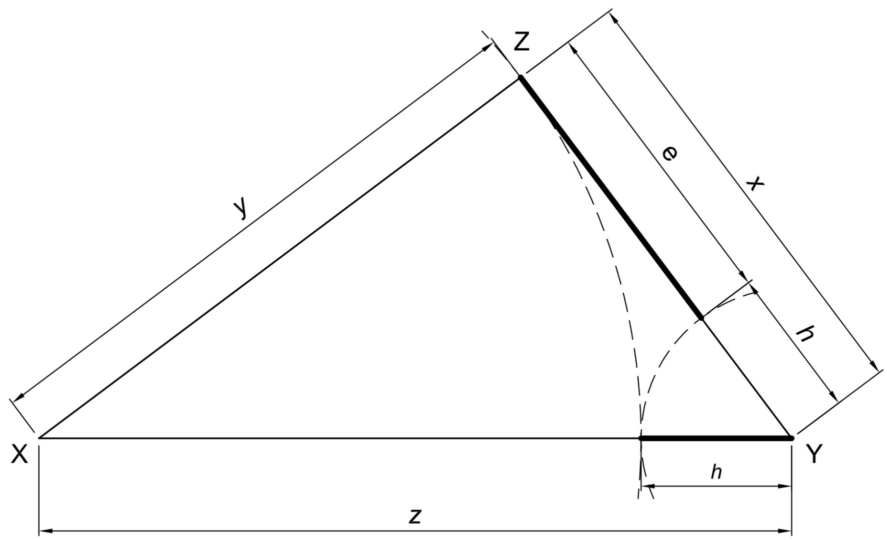

Obrázek 1.1: Grafické znázornění zápisu (1.1).

## 1.3 Nedostatko-přebytkové značení

Klasické značení (1.1) je v literatuře i při praktickém generování pythagorejských trojúhelníků velmi oblíbené, i přes nemožnost vyjádřit s jeho pomocí všechny pythagorejské trojúhelníky (viz. [25]). Lze ukázat ([17]), že při odlišné reprezentaci pythagorejského trojúhelníku $(x, y, z)$, která využívá tzv. *nedostatek* (anglicky "height") $h = z - y$ a *přebytek* (anglicky "excess") $e = x + y - z$ trojúhelníku, je možné popsat všechny pythagorejské trojúhelníky. Je evidentní, že obě čísla $h$ a $e$ budou kladná, a na rozdíl od klasického značení, kde $m$ a $n$ nemají evidentní geometrický význam, zde $e$ vyjadřuje, o kolik je cesta z $X$ do $Y$ po přeponě kratší než cesta po odvěsná1ch. Grafické znázornění tohoto značení je na obrázku 1.2. V této části budeme uvažovat, že v pythagorejském trojúhelníku $(x, y, z)$ platí $x < y$.

V literatuře se nedostatko-přebytkový zápis tak často jako klasický zápis nevyskytuje, ale díky možnosti propojit takto zapsané pythagorejské trojúhelníky vzájemnými vztahy je užitečný pro mnoho důkazů, například týkajících se obvodu trojúhelníků a kružnice vepsané i opsané trojúhelníku. Tento typ zápisu byl užit poprvé v [25] a v různých podobách například v [16], [8] a [28]. [18] a [17] pak dokázali, že reprezentace pomocí nedostatku a přebytku umožňuje popsat všechny pythagorejské trojúhelníky.

**Věta 1.7** ([17])**.** *Ke každé dvojici $(k, h)$ přirozených čísel přiřaďme pythagorejskou trojici*




Obrázek 1.2: Grafické znázornění nedostatko-přebytkového značení (1.5).

*takovýmto způsobem: Nechť $h = pq^2$, kde $p$ je přirozené číslo neobsahující čtverec a $q$ je přirozené číslo. Označme $d = 2pq$ pro $p$ liché, a $d = pq$ pro $p$ sudé a dále nechť $k > \sqrt{2}h/d$ . Pak trojice*

$$\big(h + dk, dk + (dk)^2/2h, h + dk + (dk)^2/2h\big) \tag{1.5}$$

*popisuje pythagorejský trojúhelník. Toto přiřazení je jednoznačné, tj. pro každou dvojici čísel $(k, h)$ existuje právě jeden pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$ a naopak. Navíc platí, že tento trojúhelník je primitivní právě tehdy, když $k$ a $h$ jsou nesoudělná a $h = q^2$ pro $q$ liché nebo $h = 2q^2$.*

**Poznámka 1.8.** Vidíme, že ve znění věty se neobjevuje parametr $e$, ale je nahrazen rozepsaným tvarem $e = kd$. Tento zápis usnadňuje důkazy.

**Poznámka 1.9.** Řekneme, že číslo neobsahuje čtverec, pokud v jeho prvočíselném rozkladu nemá žádné prvočíslo exponent větší než jedna.

Pro větší přehlednost je zde souhrn vztahů mezi parametry $x, y$ a $z$ a $h, k, p$ a $d$.

- výpočet $h$: $\quad h = z - y$,
- určení $p$ a $q$: $\quad$ zapsat $h$ do tvaru $h = pq^2$, kde $p$ neobsahuje čtverec,

- výpočet $d$: $d = 2pq$ pro $p$ liché, $d = pq$ pro $p$ sudé,
- výpočet $k$: $k = (x - h)/d$.

**Lemma 1.10** ([17])**.** *K libovolnému přirozenému číslu $h$, zapsanému ve tvaru $h = pq^2$, kde $p$ je přirozené číslo neobsahující čtverec a kde $q$ je přirozené číslo, přiřadíme přirozené číslo $d$ ve tvaru $d = 2pq$ pokud $p$ je liché a tvaru $d = pq$ pokud $p$ je sudé. Potom $2h|d^2$. Současně, pro každé přirozené $D$ takové, že $2h|D^2$, platí, že $d|D$.*

*Důkaz.* Pro liché $p$ je $d$ ve tvaru $d = 2pq$. Potom $d^2 = 4p^2q^2 = 4ph$. Pro sudé $p$ je $d = pq$ a označme $p = 2p_0$. Potom $d^2 = 4p_0^2q^2 = 2p_0h$. Pro obě možnosti tedy platí, že $2h|d^2$.

Pro přirozené číslo $D$ existuje prvočíselný rozklad ve formě $D = d_1^{r_1}d_2^{r_2}\cdots d_k^{r_k}$ a jeho druhá mocnina tedy bude mít tvar $D^2 = d_1^{2r_1}d_2^{2r_2}\cdots d_k^{2r_k}$. Podle předpokladu $p$ neobsahuje čtverec, můžeme tedy psát $p = p_1p_2\cdots p_m$ a $q^2 = q_1^{2t_1}q_2^{2t_2}\cdots q_n^{2t_n}$. Z předpokladů víme, že $2h|D^2$, potom pro každé $q_i$ existuje nějaké $d_j$ tak, $q_i = d_j$ a $2t_i \leq 2r_j$. Odtud plyne, že $q|D$ a $D$ můžeme zapsat jako $D = qD_1$, kde $D_1 = s_1^{u_1}s_2^{u_2}\cdots s_l^{u_l}$. Z předpokladů víme, že $2h = 2pq^2|D^2$ a současně $D^2 = q^2D_1^2$. Potom $2p|D_1^2$. Protože $p$ ze způsobu konstrukce neobsahuje čtverec, musí i $p|D_1$. Pro $p$ sudé máme $d = pq|D$. Pokud $p$ je liché, $D_1^2$ obsahuje $2^2$, bude i $2p|D_1$, a tudíž $d = 2pq|D$. □

**Lemma 1.11.** *Za předpokladů Věty 1.7 existuje $k \in \mathbb{N}$, takové, že přebytek $e$ lze zapsat ve tvaru $e = dk$.*

*Důkaz.* Z (1.5) vyplývá, že $e^2 = 2(z - x)(z - y) = 2(z - x)h$. Odtud vidíme, že $2h|e^2$ a podle předchozího Lemmatu $d|e$. □

Nyní se již dostáváme k důkazu Věty 1.7.

*Důkaz Věty 1.7.* Musíme ukázat, že trojice (1.5) tvoří pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$, tedy že čísla $x, y, z$ jsou přirozená, splňují rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ a $x < y$. Označme $x = h + dk$, $y = dk + (dk)^2/2h$ a $z = h + dk + (dk)^2/2h$.

1. V předchozím Lemmatu 1.10 jsme ukázali, že $2h|d^2$. Odtud a z přirozenosti $h, k$ a $d$ plyne, že $x, y$ a $z$ jsou přirozená čísla.

2. Prostým umocněním a porovnáním lze snadno ukázat, že $x^2 + y^2 = z^2$.

3. Vzhledem k požadavku na uspořádání $x < y$ musí platit $h + dk < dk + (dk)^2/2h$. To ale snadno plyne z předpokladu $k > \sqrt{2}h/d$.

Vzhledem k jednoznačnému vztahu mezi stranami trojúhelníku $x, y$ a $z$ na jedné straně a nedostatkem $h$, přebytkem $e$, resp. $k$, na druhé straně, odpovídá každému trojúhelníku $(x, y, z)$ jedna dvojice $(e, h)$, resp. $(k, h)$.

Zbývá nám ukázat, že trojúhelník je primitivní tehdy a jen tehdy, když $h$ a $k$ jsou nesoudělná a $h = q^2$ pro $q$ liché nebo $h = 2q^2$. Nechť je trojúhelník (1.5) primitivní. U primitivního trojúhelníku platí, že $z - x$ a $z - y$ jsou nesoudělná čísla. Předpokládejme naopak, že mají společného dělitele $r$. Potom $r$ dělí i součet

$$(z - x)^2 + (z - y)^2 = (3z - 2x - 2y)z.$$

Musí tedy platit, že $r|z$ nebo $r|(3z-2x-2y)$. V prvním případě by z dělitelností obou rozdílů plynulo, že $r|y$ a $r|x$, což je ve sporu s předpokladem o nesoudělnosti $x$ a $y$. V druhém případě platí, že $r$ dělí $3z - 2x - 2y = 2(z - x) + 2(z - y) - z$ a tudíž opět $r|z$. V obou případech mají $x, y$ a $z$ společného dělitele, trojúhelník tedy není primitivní. Tím jsme dospěli ke sporu. Můžeme nadále předpokládat, že

$$z - x = \frac{k^2 d^2}{2h} \qquad \text{a} \qquad z - y = h \tag{1.6}$$

nemají společného dělitele. Pro liché číslo $p$ můžeme psát $k^2d^2/2h = 2pk^2$ a $h = pq^2$, tudíž díky jejich nesoudělnosti musí být $p = 1$, $q$ musí být liché, $2k$ a $q$ musí být nesoudělná. Pro $p$ sudé můžeme psát $k^2d^2/2h = pk^2/2$ a $h = pq^2$, tudíž díky jejich nesoudělnosti musí být $p = 2$, a $k$ a $2q$ musí být nesoudělná. Po sloučení obou případů dostáváme, že i $k$ a $h$ jsou nesoudělná čísla.

Nyní ukážeme opačnou implikaci. Pro $h$ ve tvaru $q^2$ (tj. $q$ liché, $p = 1$) můžeme psát $x = h + dk = q^2 + 2qk = q(q + 2k)$ a $y = dk + d^2k^2/2h = 2k(q + k)$. Pro spor předpokládejme, že $x$ i $y$ mají společného dělitele $r$. Potom $r$ nemůže být 2, protože $x = q(q+2k)$ je liché. Tedy

$r$ musí dělit $q$ nebo $q+2k$, a musí dělit $k$ nebo $q+k$. Ze všech těchto čtyř možností vyplývá, že $r|q$ a $r|k$, což je spor s předpokladem věty. Odtud již máme, že $x$ a $y$ nemají společného dělitele a trojúhelník (1.5) je tedy primitivní. Pro možnost, kde $h$ bude tvaru $2q^2$, dostáváme z výrazů pro $x = 2q(q+k)$ a $y = k(q+2k)$ obdobnou argumentací stejný závěr. □

**Důsledek 1.12** (Věty 1.7, [17])**.** *Pro primitivní pythagorejský trojúhelník, kde $x$ je sudé, jsou zápisy $(k,h)$, $(k,q)$ a $(e,h)$ ekvivalentní.*

*Důkaz.* Podle Věty 1.7 je v primitivním pythagorejském trojúhelníku $h$ ve tvaru $h = q^2$ pro $q$ liché nebo $h = 2q^2$. V důkazu Věty 1.7 jsme ukázali, že v prvním případě je $x$ liché a v druhém případě je $x$ sudé. Odtud snadno plyne ekvivalence mezi zápisy $(k,h)$ a $(k,q)$.

Mějme nyní dané $(k,h)$. Víme, že $h = 2q^2$, tedy $p = 2$. Pro sudé $p$ je $d = 4q$, což postačuje k určení $e = kd$. Naopak pokud máme dané $(e,h)$, opět je $d = 4q$ a odtud již získáme $k$. □

**Důsledek 1.13** ([17])**.** *Nechť $(x,y,z)$ je primitivní pythagorejský trojúhelník. Potom platí následující:*

1. *Pokud je $x$ liché, trojúhelník se popíše pomocí dvojice $(k,q^2)$, kde $2k$ a $q$ jsou nesoudělná a strany se vyjádří $(q^2+2qk, 2qk+2k^2, q^2+2qk+2k^2)$.*
2. *Pokud je $x$ sudé, trojúhelník se popíše pomocí dvojice $(k,2q^2)$, kde $k$ a $2q$ jsou nesoudělná a strany se vyjádří $(2q^2+2qk, 2qk+k^2, 2q^2+2qk+2k^2)$.*

*Důkaz.* Důkaz vychází z důkazu Věty 1.7. □

## 1.4 Maticové stromy

K jinému způsobu zápisu a generování pythagorejských trojúhelníků vede myšlenka představit si velikosti stran pythagorejského trojúhelníka jako sloupcový vektor. Poprvé se tato myšlenka objevila v [4] a později byla použita např. v [11], [15] a [20]. K lepší názornosti bude užitečné pracovat s čísly $k$ a $q$ z nedostatko-přebytkového značení z minulé podkapitoly. Pomocí takovéhoto zápisu lze snadno vidět názornost a vztahy mezi trojúhelníky ve stromové struktuře. Generování pythagorejských trojúhelníků pomocí matic lze nalézt v literatuře v mnoha dalších podobách například v [1] a [27]. Označme $A_1$, $A_2$ a $A_3$ následující matice:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Věta 1.14** ([17])**.** *Nechť $(x, y, z)$ je primitivní pythagorejský trojúhelník, a předpokládejme, že $x$ je sudé. Potom každý pythagorejský primitivní trojúhelník dostaneme vynásobením trojúhelníka $(4, 3, 5)$ jakožto sloupcového vektoru jedinečnou kombinací matic $A_i$.*

**Poznámka 1.15.** Matice $A_1$, $A_2$ a $A_3$ nejsou jediné, které transformují pythagorejskou trojici na jinou pythagorejskou trojici. Podrobně se tomuto tématu věnuje například [5] a [2]. V [26] je podrobné vysvětlení, jakou obecnou formu takové matice mají.

*Důkaz.* Dle Důsledku 1.12, můžeme zapsat primitivní pythagorejský trojúhelník pomocí dvojice $(k, q)$. Pro připomenutí, předpisy pro jednotlivé délky stran jsou

$$x = 2q(q + k), \qquad y = k(2q + k) \qquad \text{a} \qquad z = 2q^2 + 2qk + k^2.$$

Dále označme $T(k, q)$ sloupcový vektor tvořený délkami stran tohoto trojúhelníku, tj.

$$T(k, q) = \begin{pmatrix} 2q(q + k) \\ k(2q + k) \\ 2q^2 + 2qk + k^2 \end{pmatrix}.$$

Snadno nahlédneme, že primitivní pythagorejský trojúhelník $(4, 3, 5)$ odpovídá $T(1, 1)$.

Násobením například maticí $A_2$ vznikne nový trojúhelník $(x', y', z')$:

$$A_2 T(k, q) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2q(q + k) \\ k(2q + k) \\ 2q^2 + 2qk + k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6q^2 + 10qk + 4k^2 \\ 8q^2 + 10qk + 3k^2 \\ 10q^2 + 14qk + 5k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Ověření, že se jedná pythagorejský trojúhelník je snadné.

Trojúhelník $(x', y', z')$ je v nedostatko-přebytkovém značení vyjádřen pomocí $(k', h')$, resp. $(k', q')$, kde $h' = z' - y' = 2q^2 + 4qk + 2k^2 = 2(q+k)^2$, $q' = (q+k)$ a $d' = 2(q+k)$. Odtud $h' = 2q'^2$ a

$$k' = \frac{x' - h'}{d'} = \frac{6q^2 + 10qk + 4k^2 - 2(q+k)^2}{2(q+k)} = \frac{2q^2 + 3qk + k^2}{q+k} = 2q + k$$

. Obdobným způsobem získáme vztah mezi vyjádřením původního trojúhelníka a trojúhelníkem vzniklým násobením maticemi $A_1$ a $A_3$, neboli

$$\begin{aligned} A_1 T(k,q) &= T(k, q+k), \\ A_2 T(k,q) &= T(2q+k, q+k), \\ A_3 T(k,q) &= T(2q+k, q). \end{aligned}$$

Lze ukázat, že pro tyto trojúhelníky platí $h' = 2q'^2$, kde $q' = q + k$ v prvním a druhém případě, resp. $q' = q$ ve třetím případě. Z nesoudělnosti $k$ a $2q$ (Důsledek 1.13) a vyjádření $k'$ a $q'$ snadno nahlédneme nesoudělnost $k'$ a $2q'$. Odtud již plyne, že po vynásobení maticemi $A_1$, $A_2$ resp. $A_3$ jsou nově vzniklé pythagorejské trojúhelníky opět primitivní.

Můžeme si povšimnout, že při násobení $A_i(k,q)$ dostáváme tři různé trojúhelníky $(k', q')$, neboť $k' < q'$ v prvním případě, $q' < k' < 2q'$ v druhém a $2q' < k'$ ve třetím.

Nyní zbývá ukázat, že zadaný primitivní pythagorejský trojúhelník $T(k,q)$, kde $k > 1$ nebo $q > 1$ a $k$ a $2q$ jsou nesoudělné, lze získat z trojúhelníka $T(1,1)$ jedinečnou kombinací matic $A_1$, $A_2$ a $A_3$. Protože matice $A_i$ mají determinant roven jedné, existují k nim matice inverzní. Pokud těmito maticemi $A_i^{-1}$ vynásobíme trojúhelník $T(k,q)$ dostáváme:

$$\begin{aligned} A_1^{-1} T(k,q) &= T(k, q-k), && k < q, \\ A_2^{-1} T(k,q) &= T(2q-k, k-q), && q < k < 2q, \\ A_3^{-1} T(k,q) &= T(k-2q, q), && 2q < k. \end{aligned}$$

Pro trojúhelník $T(k,q)$ platí právě jedna z možností $k < q$, $q < k < 2q$ nebo $2q < k$. Tyto případy jsou disjunktní. Násobením $A_1^{-1}$, $A_2^{-1}$, resp. $A_3^{-1}$ vznikne nový primitivní pythagorejský trojúhelník $T(k',q')$, kde $q'+k' < q+k$. Opakováním najdeme složení inverzních matic $A_{i_n}^{-1}\dots A_{i_1}^{-1}$, který převádí trojúhelník $T(k,q)$ na trojúhelník $T(1,1)$. Opačným postupem, tj. vynásobením maticemi $A_{i_1}\dots A_{i_n}$ získáme z trojúhelníku $T(1,1)=(4,3,5)$ zvolený trojúhelník $T(k,q)$. Tato cesta také bude jediná, protože kdyby v nějakém kroku platilo

$$A_i T(k',q') = A_j T(k'',q'')$$

pro $i \neq j$, musely by pro výsledný trojúhelník $T(k,q)$ platit současně dvě nerovnosti, které ale popisují disjunktní případy. Tím je tvrzení dokázáno.

$\square$

**Poznámka 1.16.** Pro zobecnění postupu na všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky vynásobíme sloupcový vektor stran maticí $M$, která $(x,y,z)$ převede na $(y,x,z)$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Tvrzení Věty 1.14 bude platit i pro trojúhelníky s lichým $x$, pokud nahradíme matice $A_i$ maticemi $MA_iM$ a trojúhelník $(4,3,5)$ trojúhelníkem $(3,4,5)$.

# Kapitola 2

# Vlastnosti stran v pythagorejských trojúhelnících

Pro pythagorejské trojúhelníky platí kromě samotné rovnice mnoho dalších zajímavých vlastností, mezi nimi např. dělitelnost délek stran. Znalost těchto zákonitostí usnadňuje odhalení pythagorejských trojúhelníků v úlohách bez předchozí přípravy.

## 2.1 Odlišná parita odvěsen

Jednou ze základních vlastností primitivního pythagorejského trojúhelníku je, že má právě jednu odvěsnu lichou a právě jednu odvěsnu sudou.

**Lemma 2.1.** *Nechť* $(x, y, z)$ *je primitivní pythagorejský trojúhelník. Pak platí, že odvěsny mají odlišnou paritu.*

*Důkaz.* Tento důkaz lze nalézt v [24, s. 4]. Mějme primitivní pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$. Z definice 1.3 jsou délky odvěsen nesoudělná čísla, a tudíž nemohou být obě sudá. Ukážeme, že délky odvěsen nemohou být současně lichá čísla. Předpokládejme pro spor, že jsou délky obou odvěsen lichá čísla. Nechť $x = 2k + 1, y = 2l + 1$, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Druhou mocninu $x$ lze zapsat jako

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1,$$

a druhou mocninu $y$ nápodobně. Vzhledem k tomu, že buď $k$ nebo $k+1$ je sudé číslo, zbytek $x^2$ při dělení osmi je jedna, tj. lze psát

$$x^2 = 8p + 1, \quad \text{a} \quad y^2 = 8q + 1,$$

kde $p$ a $q$ jsou lichá přirozená čísla. Odtud plyne, že

$$x^2 + y^2 = 8(p+q) + 2.$$

Součet druhých mocnin $x$ a $y$ dává tedy číslo, které je sudé, složené z násobku osmi a zbytku dva. Takové číslo ale nebude čtvercem, protože druhá mocnina přirozeného čísla musí být buď dělitelná 4 (pokud je druhou mocninou čísla sudého) nebo lichá. A tím dostáváme spor, neboť zde se jedná o číslo sudé, která má po dělení čtyřmi zbytek dva. Neexistuje tedy přirozené číslo $z$, které splňuje $x^2 + y^2 = z^2$. □

## 2.2 Dělitelnost délek stran čtyřmi

**Lemma 2.2.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Pak je délka alespoň jedné odvěsny dělitelná čtyřmi.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt např. v [24, s. 6]. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(x, y, z)$ je primitivní trojúhelník. Pro obecný pythagorejský trojúhelník tvrzení Věty snadno dostaneme s pomocí Lemmatu 1.4. V klasickém zápisu (1.1) primitivního trojúhelníka platí $y = 2mn$. Podle Lemmatu 1.6 je součin $mn$ sudé číslo, a proto je $y$ dělitelné čtyřmi. □

**Důsledek 2.3.** *V žádném pythagorejském trojúhelníku nejsou všechny délky stran prvočísla.*

## 2.3 Dělitelnost délek stran třemi

**Věta 2.4.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Pak délka alespoň jedné odvěsny je dělitelná třemi.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt v [24, s. 23]. Pro spor předpokládejme, že ani $x$ ani $y$ nejsou čísla dělitelná třemi, a jsou tedy ve tvaru

$$x = 3k \pm 1, \qquad y = 3l \pm 1,$$

pro nějaká celá čísla $k$ a $l$. Pythagorejská rovnice potom dává předpis pro $z^2$ ve tvaru

$$z^2 = x^2 + y^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 + 9l^2 \pm 6l + 1 = 3(3k^2 + 3l^2 \pm 2k \pm 2l) + 2,$$

neboli zbytek $z^2$ po dělení třemi je dva. Pokud by $z$ bylo dělitelné třemi, bude i jeho mocnina dělitelná třemi. Pokud $z$ třemi dělitelné není, pak z identity použité pro umocnění čísel nedělitelných třemi

$$(3t \pm 1)^2 = 9t^2 \pm 6t + 1 = 3(3t^2 \pm 2t) + 1$$

ale plyne, že zbytek $z^2$ po dělení třemi je jedna. Ani v jednom z případů zbytek $z^2$ po dělení třemi není dva. Vyčerpáním všech možností se dostáváme do sporu s předpokladem, a tedy délka alespoň jedné odvěsny musí být dělitelná třemi. $\square$

## 2.4 Dělitelnost délek stran pěti

**Věta 2.5.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Pak délka alespoň jedné strany je dělitelná pěti.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt v [24, s. 24]. Mějme přirozené číslo $n$, které není dělitelné pěti, potom je ve tvaru

$$n = 5k \pm 1, \qquad \text{nebo} \qquad n = 5k \pm 2,$$

kde $k$ je celé číslo. Jeho druhá mocnina má tvar

$$n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1, \qquad \text{nebo} \qquad n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4,$$

neboli $n^2 \bmod 5 = 1$ nebo $n^2 \bmod 5 = 4$. Mějme tedy trojici $(x, y, z)$, kde žádná ze stran pěti dělitelná není. Pro přehlednost rozboru případů, v jakém tvaru vychází $z^2$, užijeme tabulku:

| $x^2 \bmod 5$ | $y^2 \bmod 5$ | $x^2 + y^2 \bmod 5$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 4 | 0 |
| 4 | 1 | 0 |
| 4 | 4 | 3 |

První a čtvrtý případ vedou ke sporu s předpokladem, protože číslo nedělitelné pěti nemá v druhé mocnině po dělení pěti jiný zbytek než jedna, nebo čtyři. V druhém a třetím případě je $z^2$ dělitelné pěti, což je spor s předpokladem. V primitivním pythagorejském trojúhelníku tedy nemůže nastat situace, kdy žádná strana není dělitelná pěti. $\square$

# Kapitola 3

# Kružnice vepsané a připsané

Konstrukce kružnice vepsané a kružnic připsaných patří mezi oblíbená cvičení na rýsování os úhlů a spouštění kolmic. Vztahy mezi délkami stran a poloměrem těchto kružnic jsou jednoduché a lze je snadno zkontrolovat a ověřit po rýsování. Vztahům mezi délkami stran a poloměry kružnic vepsaných a připsaných se věnuje např. [24], [29] a [10].

## 3.1 Poloměr kružnice vepsané a kružnic připsaných

**Věta 3.1.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník a označme $r$ poloměr v něm vepsané kružnice. Pak lze $r$ vyjádřit jako*

$$r = \frac{x + y - z}{2}.$$

*Odtud navíc plyne, že poloměr $r$ je přirozené číslo.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt např. v [24, s. 42]. Pro obsah pythagorejského trojúhelníka $(x, y, z)$ platí nejen Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)},$$

kde $s = (x + y + z)/2$ je polovina obvodu trojúhelníka, ale i jednodušší zápis pomocí délek odvěsen

$$S = \frac{xy}{2}. \tag{3.1}$$

Díky vepsané kružnici lze také obsah pythagorejského trojúhelníka zapsat jako součet obsahů jednotlivých trojúhelníků, s vrcholy ve středu vepsané kružnice a s výškou $r$, tj.

$$S = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{zr}{2} = \frac{x+y+z}{2} r = sr. \tag{3.2}$$

V dalším kroku doplníme součin $xy$ na čtverec a odstraněním druhých mocnin užitím pythagorejské rovnice s cílem dostat součin, v němž bude jeden člen polovina obvodu, tj. (3.1) můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} S = \frac{xy}{2} = \frac{2xy}{4} = \frac{x^2+2xy+y^2-z^2}{4} = \\ = \frac{(x+y)^2-z^2}{4} = \frac{(x+y+z)(x+y-z)}{4} = \\ = \frac{x+y+z}{2}\,\frac{x+y-z}{2}. \end{aligned}$$

Porovnáním s (3.2) dostáváme, že $r = (x+y-z)/2$. Z Lemmatu 2.1 plyne, že výraz $x+y-z$ je sudé číslo, a $r$ je tedy přirozené. □

**Poznámka 3.2.** K důkaz předchozí Věty je možné využít i klasické značení (1.1) pomocí dvojice $m, n$ přirozených nesoudělných čísel, tj.

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2. \tag{3.3}$$

Porovnáním (3.1) a (3.2) a dosazením z (3.3) vyjádříme poloměr vepsané kružnice jako

$$\begin{aligned} r = \frac{xy}{2}\frac{2}{x+y+z} = \frac{(m^2-n^2)2mn}{m^2-n^2+2mn+m^2+n^2} = \\ = \frac{2mn(m^2-n^2)}{2m^2+2mn} = \frac{n(m-n)(m+n)}{m+n} = n(m-n). \end{aligned}$$

Protože $m$ i $n$ jsou přirozená čísla, je i jejich rozdíl a součin přirozené číslo.

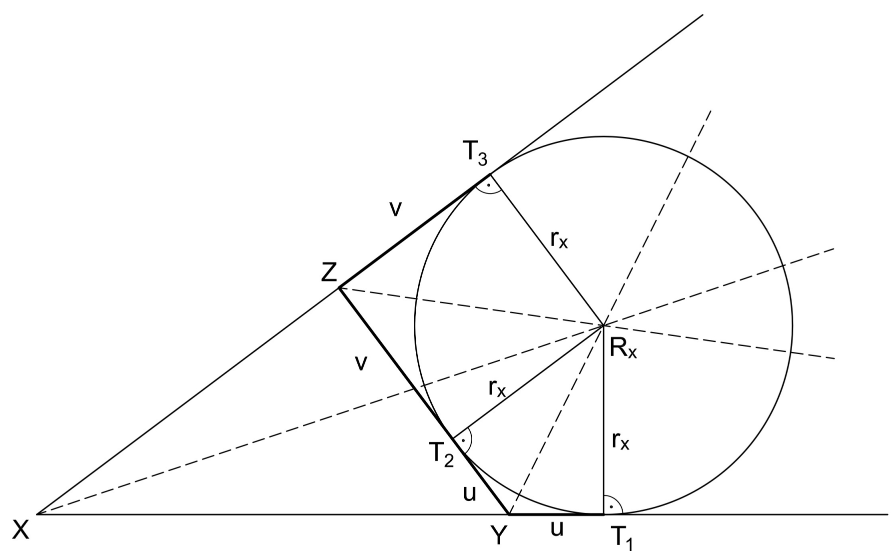
Pro poloměry kružnic připsaných platí podobné tvrzení.

**Věta 3.3.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník a označme $r_x$, $r_y$ a $r_z$ poloměry kružnic připsaných ke stranám $x, y$ a $z$. Pak platí*

$$r_x = \frac{x - y + z}{2}, \quad r_y = \frac{y - x + z}{2}, \quad r_z = \frac{x + y + z}{2}.$$

*a odtud navíc plyne, že $r_x$, $r_y$ a $r_z$ jsou přirozená čísla.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme s využitím vztahů mezi pythagorejským trojúhelníkem a poloměrem kružnice připsané ke straně $x$, tj. $r_x$, které jsou zřejmé z Obrázku 3.1. Označme jako $T_2$ bod doteku kružnice připsané ke straně $x$ se stranou $x$, a dále označme $u$ jako vzdálenost mezi body $Y$ a $T_2$ a $v$ jako vzdálenost mezi body $T_2$ a $Z$. Je evidentní, že platí $x = u + v$ a $z + u = y + v$ a $r_x = v$. Odtud snadno plyne, že $z + x - v = y + v$ a $r_x = v = \frac{x-y+z}{2}$. Pro poloměry ostatních připsaných kružnic je důkaz obdobný. Ve všech případech je čitatel




Obrázek 3.1: K odvození poloměrů připsaných kružnic.

kladné sudé číslo, a proto jsou poloměry opsaných kružnic $r_x$, $r_y$, $r_z$ přirozená čísla. □

**Poznámka 3.4.** Jiný důkaz předchozí Věty lze najít v [3].

## 3.2 Primitivní pythagorejské trojúhelníky odvozené z poloměru vepsané kružnice

Ve Větě 3.1 bylo ukázáno, že poloměr $r$ kružnice vepsané závisí na délkách stran. Nabízí se proto otázka, zda lze z daného poloměru zpětně pythagorejský trojúhelník zkonstruovat.

**Věta 3.5** ([24, s. 42]). *Nechť $r$ je přirozené číslo. Pak trojice*

$$\bigl(2r+1,\, 2r^2+2r,\, 2r^2+2r+1\bigr). \tag{3.4}$$

*tvoří primitivní pythagorejský trojúhelník a $r$ odpovídá poloměru kružnice jemu vepsané.*

*Důkaz.* Nechť $x = 2r+1$, $y = 2r^2+2r$ a $z = 2r^2+2r+1$. Snadno nahlédneme, že všechna tři čísla jsou přirozená. Pro ověření, že $x, y$ a $z$ tvoří strany pythagorejského trojúhelníka, dokážeme rovnost $x^2+y^2 = z^2$. Umocněné délky stran mají tvar

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (2r+1)^2 + (2r^2+2r)^2 = 4r^2+4r+1+4r^4+8r^3+4r^2 = \\
&= 4r^4+8r^3+8r^2+4r+1, \\
z^2 &= (2r^2+2r+1)^2 = 4r^4+4r^3+2r^2+4r^3+4r^2+2r+2r^2+2r+1 = \\
&= 4r^4+8r^3+8r^2+4r+1.
\end{aligned}$$

Protože jsou délky odvěsen nesoudělná čísla, je získaný trojúhelník primitivní. Navíc platí, že $(x+y-z)/2 = r$, tedy $r$ je poloměr kružnice vepsané v trojúhelníku (3.4). □

Ukázali jsme, že k danému poloměru $r$ jsme schopni nalézt primitivní pythagorejský trojúhelník. Zůstává otázkou, zda je tento trojúhelník jednoznačný, nebo existují i jiné primitivní pythagorejské trojúhelníky se stejným poloměrem vepsané kružnice. Například pro $r = 3$ je možno nalézt dva primitivní trojúhelníky, $(7, 24, 25)$ a $(8, 15, 17)$; oba jsou primitivní.

**Věta 3.6** ([24, s. 43]). *Nechť $r$ je přirozené číslo a $k \geq 0$ nechť označuje počet lichých prvočíselných dělitelů $r$. Pak existuje právě $2^k$ primitivních pythagorejských trojúhelníků s vepsanou kružnicí o poloměru $r$.*

*Důkaz.* Tento důkaz vychází z [22]. Nechť $r$ je přirozené číslo a $k \geq 1$ je počet lichých prvočíselných dělitelů $r$. Uvažujme libovolný rozklad $r = uv$, kde $u$ a $v$ jsou nesoudělná přirozená čísla a $u$ je liché. Položme $m = u + v$ a $n = v$. Z nesoudělnosti čísel $u$ a $v$ plyne nesoudělnost čísel $m$ a $n$. Vzhledem k tomu, že $u$ je liché, musí být jedno z čísel $m$ a $n$ sudé (pro $v$ liché je sudé $m$, pro $v$ sudé je sudé $n$). Dále platí $m > n$, neboť jistě $u + v > v$. Pro každý takový rozklad $r = uv$ tedy existuje jediný primitivní pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$ s poloměrem vepsané kružnice $r$, kde

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \quad \text{a} \quad r = n(m - n).$$

Nyní zbývá ukázat, že pro dané $r$ existuje $2^k$ možných rozkladů $uv$, splňující podmínky výše.

Nechť $r > 1$ je liché. Potom má $r$ pouze liché prvočíselné dělitele a prvočíselné rozklady čísel $r$, $u$ a $v$ můžeme psát

$$r = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}, \quad u = \prod_{i=1}^{k} p_i^{f_i} \quad \text{a} \quad v = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i - f_i},$$

kde $p_i$ jsou navzájem různá lichá prvočísla a $e_i \leq f_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$. Vzhledem k nesoudělnosti čísel $u$ a $v$ musí být pro každé $i$ buď $e_i = 0$ nebo $e_i = f_i$. Pro zvolené $r$ tedy existuje $2^k$ možných rozkladů.

Nechť je nyní $r$ sudé. Potom má $r$ kromě $k$ lichých prvočíselných dělitelů ještě za dělitele číslo 2, a jeho prvočíselný rozklad můžeme psát jako $r = 2^n r_1$, kde $n \geq 1$ a $r_1$ je liché (a má $k$ lichých prvočíselných dělitelů). Pak $u = 2^j u_1$, $v = 2^{n-j} v_1$ a $u_1 v_1 = r_1$. Vzhledem k nesoudělnosti $u$ a $v$ musí být opět $j = 0$ nebo $j = n$. V případě, že $j = n$, je ale $u$ sudé, což je spor s předpokladem. Musí tedy být $u = u_1$ a $v = 2^n v_1$. Podle předchozího bodu existuje $2^k$ možných rozkladů čísla $r_1$, a tedy i čísla $r$.

□

## 3.3 Generování všech trojúhelníků s daným poloměrem kružnice vepsané

Pokud bychom chtěli získat nejen primitivní, ale všechny trojúhelníky s daným poloměrem kružnice jemu vepsané, stačí si uvědomit, že libovolných neprimitivní trojúhelník získáme z nějakého primitivního trojúhelníku vynásobením všech stran stejným přirozeným číslem.

Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník a nechť $d$ je největší společný dělitel délek jeho stran. Pak existovat primitivní pythagorejský trojúhelník $(x_1, y_1, z_1)$, kde

$$x = d\,x_1, \quad y = d\,y_1, \quad z = d\,z_1, \quad r = \frac{x+y-z}{2} = d \cdot \frac{x_1+y_1-z_1}{2},$$

neboli $d$ dělí nejen délky všech stran, ale i poloměr vepsané kružnice. Vydělením poloměru kružnice původního trojúhelníka přirozeným číslem se dostaneme k poloměru kružnice vepsané trojúhelníku primitivnímu.

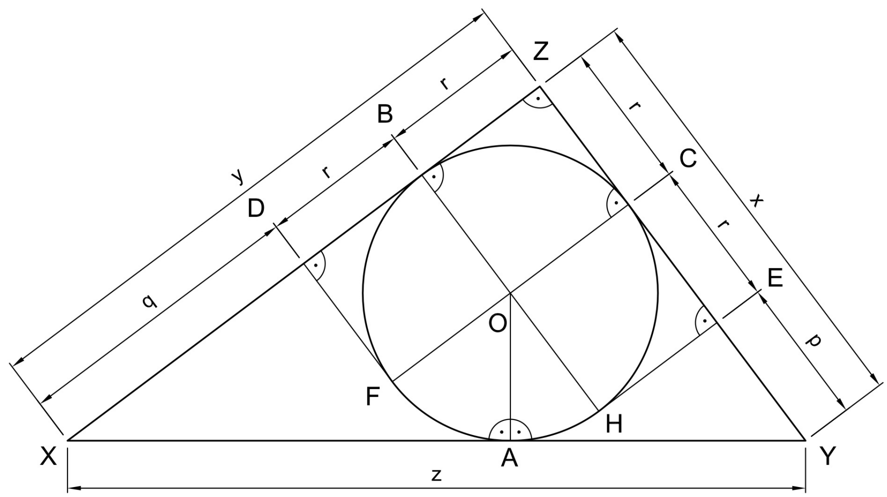
Na druhou stranu, pokud máme dán poloměr $r_1$ kružnice vepsané primitivnímu pythagorejskému trojúhelníku $(x_1, y_1, z_1)$, a $d$ je libovolné přirozené číslo, pak $r = d\,r_1$ je poloměr kružnice vepsané pythagorejskému trojúhelníku $(d\,x_1, d\,y_1, d\,z_1)$.

Pro nalezení všech trojúhelníků s daným poloměrem kružnice vepsané $r$, je postačující nalézt pro každého dělitele $d|r$ všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky s poloměrem kružnice vepsané $r_1 = r/d$ a poté vynásobit všechny strany konstantou $d$.

## 3.4 Poloměr vepsané kružnice ve vztahu k délce strany

V práci [19] je popsána metoda pro nalezení všech primitivních pythagorejských trojúhelníků, která využívá vztahu mezi délkami stran a poloměru kružnice vepsané. Tyto vztahy jsou viditelné z obrázku 3.2. Délky stran se dají zapsat pomocí poloměru vepsané kružnice a zbytku na straně $x$ a $y$. Zbytek strany $z$ je díky tečnám ke kružnici stejně veliký.

$$x = 2r + p, \quad y = 2r + q, \quad z = 2r + p + q. \tag{3.5}$$




Obrázek 3.2: Zápis délek stran trojúhelníka (3.5).

**Věta 3.7.** *$(2r+p, 2r+q, 2r+p+q)$ je primitivní pythagorejský trojúhelník tehdy a jen tehdy, když $p, q, r$ jsou přirozená čísla, splňující $2r^2 = pq$ a kde $p$ a $q$ jsou nesoudělná s odlišnou paritou.*

*Důkaz.* Důkaz vychází z [19]. Nechť $x = 2r + p$, $y = 2r + q$ a $z = 2r + p + q$.

1. Nechť $(x, y, z)$ tvoří primitivní pythagorejský trojúhelník. Ze vztahu $x^2+y^2 = z^2$ plyne, že $2r^2 = pq$. Dále z grafické interpretace parametrů $r, p, q$ plyne, že $r$ odpovídá poloměru kružnice vepsané, a podle Věty 3.1 je tento poloměr přirozené číslo. Dále $p = x - 2r$ a $q = y - 2r$ a tedy $p$ i $q$ jsou přirozená čísla. Předpokládejme, že $p$ a $q$ mají společného dělitele $k$, můžeme tedy psát $p = k\,p_1$ a $q = k\,q_1$. Ze vztahu $2r^2 = pq = k^2 p_1 q_1$ dostáváme, že $p_1 q_1 = 2(r/k)^2$ a tedy $r = k\,r_1$. Odtud již dostáváme, že $x, y$ i $z$ mají společného dělitele $k$ a trojúhelník tedy není primitivní. Tím jsme dospěli ke sporu a tedy $p$ a $q$ jsou nesoudělná. Ze vztahu $2r^2 = pq$ dále plyne, že $p$ nebo $q$ musí být sudé. Vzhledem k nesoudělnosti nemohou být obě sudá a mají tudíž opačnou paritu.

2. Nechť $p, q, r$ jsou přirozená čísla splňující $2r^2 = pq$, $p$ a $q$ nesoudělná s odlišnou paritou. Výpočtem lze snadno ověřit, že trojice $(x, y, z)$ splňuje pythagorejskou rovnici. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $p$ je liché. Musíme ukázat, že $x$ a $y$ jsou nesoudělné. Nechť $r = r_1^{t_1} r_2^{t_2} \cdots r_n^{t_n}$ je prvočíselný rozklad $r$. Ze vztahu $2r^2 = 2r_1^{2t_1} r_2^{2t_2} \cdots r_n^{2t_n} = pq$

a nesoudělnosti $p$ a $q$ dále plyne, že každé prvočíslo $r_i$ je buď v $p$, nebo $q$. Můžeme tedy psát $p = P^2$ a $q = 2Q^2$, kde $P$ a $Q$ jsou nesoudělná, $P$ je liché a platí $r = PQ$. Předpokládejme nyní, že $x$ a $y$ mají společného dělitele přirozené číslo $k > 1$, neboli $x = kx_1$, $y = ky_1$ a $z = kz_1$, pro přirozená $x_1, y_1$ a $z_1$. Z vyjádření stran (3.5) a nahrazením $p = P^2$, $q = 2Q^2$ a $r = PQ$ dále plyne, že $z_1 - x_1 = 2Q^2/k$ a $z_1 - y_1 = P^2/k$, neboli $k|Q$ a současně $k|P$. Tím jsme dospěli ke sporu s předpokladem.

□

**Poznámka 3.8.** Předchozí metoda odpovídá metodě generování pythagorejských trojúhelníků, kterou zavedl [9], a dokázána byla také např. v [23]. Parametrizace Dicksonovy metody odpovídá parametrizaci jako ve Větě 3.7, pouze se místo poloměru kružnice opsané uvažuje její průměr $R = 2r$.

# Kapitola 4

# Obvody a obsahy

Zákonitosti spojující obvody a obsahy pro počet pythagorejských trojúhelníků umožňují nejen snazší tvorbu většího množství stejných úloh, ale i jednodušší ověření správných výsledků.

## 4.1 Počet pythagorejských trojúhelníků se shodným obvodem

**Věta 4.1** ([24, s. 33])**.** *Pro každé přirozené číslo $n$ existuje alespoň $n$ různých pythagorejských trojúhelníků se stejným obvodem.*

*Důkaz.* Mějme $n$ různých primitivních pythagorejských trojúhelníků $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \ldots, n$, s obvodem $o_i = x_i + y_i + z_i$. Nechť je $o$ nejmenším společným násobkem obvodů $o_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Potom pro každé $i, i = 1, 2, \ldots, n$ je trojice

$$\left(\frac{o\, x_i}{o_i}, \frac{o\, y_i}{o_i}, \frac{o\, z_i}{o_i}\right)$$

pythagorejský trojúhelník s obvodem $o$. Přirozenost stran nahlédneme z $o_i | o$. Tyto pythagorejské trojúhelníky jsou navzájem různé, protože jsou podobné původním trojúhelníkům, které jsou z předpokladu různé. $\square$

## 4.2 Obvod pythagorejského trojúhelníka v klasickém značení

**Věta 4.2.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Potom existují přirozená čísla $k$, $m$ a $n$, kde $m$ a $n$ jsou nesoudělná a $m > n$, tak, že obvod $o$ trojúhelníka má tvar $o = 2km(m+n)$.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt v [24, s. 34.]. Z Lemmatu 1.4 plyne, že existuje přirozené číslo $k$ a primitivní pythagorejský trojúhelník $(x_1, y_1, z_1)$ takový, že $x = kx_1$, $y = ky_1$ a $z = kz_1$. Předpokládejme že $y_1$ je sudé (pro $x_1$ sudé je důkaz věty obdobný). Z Věty 1.5 plyne, že existuje dvojice přirozených nesoudělných čísel $m$ a $n$, $m > n$, popisující primitivní trojúhelník $(x_1, y_1, z_1)$, kde $x_1 = m^2 - n^2$, $y_1 = 2mn$ a $z_1 = m^2 + n^2$. Pak lze obvod primitivního trojúhelníku vyjádřit jako

$$o_1 = m^2 - n^2 + 2mn + m^2 + n^2 = 2m^2 + 2mn = 2m(m + n)$$

a pro pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$ se výraz změní na

$$o = k(m^2 - n^2) + 2kmn + k(m^2 + n^2) = 2km^2 + 2kmn = 2km(m + n).$$

□

## 4.3 Dělitelnost obsahu šesti

**Věta 4.3.** *Obsah pythagorejského trojúhelníka $(x, y, z)$ je dělitelný šesti.*

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že $(x, y, z)$ je primitivní pythagorejský trojúhelník, obecný případ je snadným důsledkem Lemmatu 1.4. Z Vět 2.4 a 2.2 plyne, že $12|xy$. Odtud již vyplývá, že obsah $S = xy/2$ je dělitelný šesti. □

**Věta 4.4** ([24, s. 37]). *Pro každé přirozené číslo $n$ existuje alespoň $n$ pythagorejských trojúhelníků $(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $z_k$ jsou navzájem různé a obsahy $S_k = x_k y_k/2$ jsou totožné.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální. Předpokládejme, že pro $n \geq 1$ tvrzení věty platí, tj. existuje $n$ pythagorejských trojúhelníků $(x_k, y_k, z_k), k = 1, 2, \ldots, n$ s různými přeponami a stejným obsahem. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že přepona prvního trojúhelníka $z_1$ je liché číslo. Pro $k = 1, 2, \ldots, n$ položme

$$\bar{x}_k = 2(y_1^2 - x_1^2)z_1 x_k, \qquad \bar{y}_k = 2(y_1^2 - x_1^2)z_1 y_k, \qquad \bar{z}_k = 2(y_1^2 - x_1^2)z_1 z_k,$$

a pro $k = n + 1$ položme

$$\bar{x}_{n+1} = (y_1^2 - x_1^2)^2, \qquad \bar{y}_{n+1} = 4x_1 y_1 z_1^2, \qquad \bar{z}_{n+1} = 4x_1^2 y_1^2 + z_1^4.$$

Trojúhelníky $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k), k = 1, 2, \ldots, n$, jsou pythagorejské, protože délky stran jsou vynásobeny konstantou, takže stále zůstávají podobné svým původním trojúhelníkům. Trojúhelník $(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1})$ není podobný žádnému z předchozích, ale jak lze výpočtem ověřit, je pythagorejský.

Obsah jednotlivých odvozených trojúhelníků je shodný a sice $4(y_1^2 - x_1^2)^2 z_1^2$-krát větší než obsah trojúhelníků původních. Spočítáním obsahu trojúhelníka $(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1})$ můžeme ukázat, že i tento má stejný obsah, neboli stejný násobek obsahu trojúhelníka $(x_1, y_1, z_1)$. Trojúhelníky $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k), k = 1, 2, \ldots, n$, mají přepony dané sudými čísly, naproti tomu trojúhelník $(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1}, \bar{z}_{n+1})$ má přeponu danou číslem lichým. Ukázali jsme, že pro $n+1$ existuje také $n + 1$ pythagorejských trojúhelníků, se shodným obsahem, ale různými přeponami a právě jedna z přepon je lichá. Tím je důkaz dokončen. $\square$

# Kapitola 5

# Počty

Tato kapitola sdružuje výsledky o počtech pythagorejských trojúhelníků splňujících určité vlastnosti.

## 5.1 Počet možných odvěsen

**Věta 5.1.** *Nechť $x$ je přirozené číslo. Pak existuje pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$ tehdy a jen tehdy, když $x > 2$.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt např. v [24, s. 26]. Jako první ukážeme nutnou podmínku, tj. že $x > 2$. Ze vzorce $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$ vyplývá, že jak $z - y$, tak $z + y$ jsou přirozená čísla. Při minimálních hodnotách $y$ a $z$ musí být $y \geq 1, z - y \geq 1, z \geq 2$. Z toho dostaneme $z + y \geq 2 + 1 = 3$, tudíž $x^2 \geq 3$ a $x \neq 1$. Pokud by navíc bylo $x = 2$, dostaneme $4 = (z - y)(z + y)$, což v součinnosti s podmínkami $z - y \geq 1$ a $z + y \geq 3$ dává hodnoty pro dvojčleny $z - y = 1$ a $z + y = 4$ , neboli $2z = 5$. Číslo $z$ ale musí být přirozené, tudíž $x \neq 2$.

Dále ukážeme postačitelnost. Nechť je $x > 2$ liché číslo. Protože platí

$$x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)^2$$

a $\frac{1}{2}(x^2 - 1)$ a $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$ jsou přirozená čísla, odpovídá trojice $\left(x, \frac{1}{2}(x^2 - 1), \frac{1}{2}(x^2 + 1)\right)$ pythagorejskému trojúhelníku. Pokud je $x$ sudé číslo, pak $\frac{x^2}{4} - 1$ a $\frac{x^2}{4} + 1$ jsou přirozená čísla a navíc platí

$$x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2.$$

Trojice $(x, x^2/4 - 1, x^2/4 + 1)$ je tedy pythagorejský trojúhelník . □

## 5.2 Počet trojúhelníků s danou délkou odvěsny nebo přepony

**Věta 5.2.** *Nechť $x$ je přirozené číslo. Pak existuje pouze konečný počet pythagorejských trojúhelníků, kde $x$ je délka odvěsny.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt např. v [24, s. 30]. Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Z rovnice $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$ plyne, že číslo $z + y$ dělí $x^2$. Odtud plyne, že $z$ i $y$ jsou menší než $x^2$, a proto je možných kombinací $y$ a $z$ pouze konečně mnoho. □

**Věta 5.3.** *Nechť $n$ je přirozené číslo. Pak existuje alespoň $n$ pythagorejských trojúhelníků se stejnou délkou odvěsny $x$, kde $x$ je přirozené číslo.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt např. v [24, s. 30]. Nechť $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ a označme

$$y_k = 2^k \left(2^{2n-2k} - 1\right), \qquad \text{a} \qquad z_k = 2^k \left(2^{2n-2k} + 1\right).$$

Potom $z_k$ jsou různá čísla, protože po dělení číslem $2^k$ dávají různý zbytek, ale současně pro všechna $k$ platí

$$x_k^2 = z_k^2 - y_k^2 = 2^{2k} \left(2^{2n-2k} + 1\right)^2 - 2^{2k} \left(2^{2n-2k} - 1\right)^2 = (2^{n+1})^2,$$

neboli druhá odvěsna $x_k$ nezávisí na $k$, tedy $x_k = x = 2^{n+1}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$. Tak jsme získali $n$ různých pythagorejských trojúhelníků $(x, y_k, z_k)$ se stejnou délkou odvěsny $x$. □

**Věta 5.4.** *Nechť $n$ je přirozené číslo. Pak existuje alespoň $n$ pythagorejských trojúhelníků se stejnou délkou přepony $z$, kde $z$ je přirozené číslo.*

*Důkaz.* Důkaz lze nalézt např. v [24, s. 31]. Nechť $n$ je přirozené číslo, a položme

$$z = (3^2 + 1)(4^2 + 1) \cdots \left[(2 + n)^2 + 1\right]$$

a nechť pro $k = 3, 4, \ldots, n + 2$ mají odvěsny délky

$$x_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\, z, \qquad \text{a} \qquad y_k = \frac{2k}{k^2 + 1}\, z.$$

Protože pro všechna $k = 3, 4, \ldots, n + 2$ je $z/(k^2 + 1)$ přirozené číslo, jsou i $x_k$ a $y_k$ přirozená čísla pro všechna $k = 3, 4, \ldots, n + 2$. Je snadné ověřit, že $x_k^2 + y_k^2 = z^2$, tedy pro každé $k = 3, 4, \ldots, n + 2$ je $(x_k, y_k, z)$ pythagorejský trojúhelník.

Posledním krokem je dokázat, že těchto $n$ trojúhelníků $(x_k, y_k, z)$, kde $k = 3, 4, \ldots, n+2$, není vzájemně podobných. Máme

$$x_k - y_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} z - \frac{2k}{k^2 + 1} z = \frac{(k - 1)^2 - 2}{k^2 + 1} z > 0.$$

Dále platí $x_k = z - \frac{2z}{k^2+1}$, a tudíž délky jednotlivých odvěsen $x_k$ jsou uspořádané, tj.

$$x_3 < x_4 < \cdots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2}.$$

Ke zvolenému $n$ jsme tedy nalezli $n$ různých pythagorejských trojúhelníků se stejnou délkou přepony a s rostoucím délkou delší odvěsny. $\square$

## 5.3 Trojúhelníky, kde délky obou odvěsen jsou čtverce

**Věta 5.5** ([24, s. 49])**.** *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Pak nemohou současně délky obou odvěsen být druhou mocninou přirozených čísel.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že existují pythagorejské trojúhelníky, kde délky obou odvěsen jsou čtverce. Vezměme z nich trojúhelník $(x, y, z)$, který má přeponu kratší nebo stejně dlouhou než libovolný jiný. Pak existují přirozená čísla $a$ a $b$ taková, že

$$x = a^2 \qquad \text{a} \qquad y = b^2.$$

Předpokládejme, že $a$ a $b$ jsou soudělná čísla se společným dělitelem $d$, tj. $a = d\,a_1$ a $b = d\,b_1$. Pak

$$z^2 = x^2 + y^2 = a^4 + b^4 = (da_1)^4 + (db_1)^4 = d^4(a_1^4 + b_1^4),$$

tudíž $z$ je dělitelné $d^2$ a lze psát $z = d^2 z_1$. Odtud máme

$$z_1^2 = a_1^4 + b_1^4.$$

Tedy trojúhelník $(a_1^2, b_1^2, z_1)$ je pythagorejský trojúhelník s odvěsnou $z_1 < z$, což je spor s předpokladem o trojúhelníku $(x, y, z)$. Čísla $a$ a $b$ tedy musí být nesoudělná a trojúhelník $(a^2, b^2, z)$ je tedy primitivní.

Díky Lemmatu 2.1 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $b^2$ je sudé a $a^2$ liché. Podle Věty 1.5 existují nesoudělná přirozená čísla $m, n$, $m > n$, že

$$x = a^2 = m^2 - n^2, \quad y = b^2 = 2mn \quad \text{a} \quad z = m^2 + n^2.$$

Ze vztahu pro $a^2$ plyne, že $(a, n, m)$ je pythagorejský trojúhelník, a podle Lemmatu 2.1 nemohou být $a$ a $n$ současně lichá čísla. Tedy $n$ musí být sudé. Označme $n = 2k$, kde $k$ je přirozené číslo a nesoudělné s $m$, protože $n$ a $m$ jsou nesoudělná. Potom $b^2 = 2mn$ lze přepsat jako $b^2 = 2^2 mk$. Označme dále $b = 2l$ pro přirozené číslo $l$. Pak platí $l^2 = mk$, a protože $m$ a $k$ jsou nesoudělná čísla, musí každé z nich být čtvercem. Tedy existují nesoudělná přirozená čísla $r$ a $s$, kde $m = r^2$, $k = s^2$.

Z nesoudělnosti $m$ a $n$ plyne nesoudělnost $a$ a $n$. Trojúhelník $(a, n, m)$ je tedy primitivní a $n$ je sudé. Existují tedy nesoudělná přirozená čísla $\bar{m}$ a $\bar{n}$, $\bar{m} > \bar{n}$, taková, že

$$a = \bar{m}^2 - \bar{n}^2, \quad n = 2\bar{m}\bar{n}, \quad m = \bar{m}^2 + \bar{n}^2.$$

Výše jsme ukázali, že $n = 2s^2$, tedy $s^2 = \bar{m}\bar{n}$ a odtud opět plyne, že $\bar{m}$ a $\bar{n}$ jsou čtverce. Existují tedy přirozená čísla $\bar{r}$ a $\bar{s}$, že $\bar{m} = \bar{r}^2$ a $\bar{n} = \bar{s}^2$.

Dohromady tedy máme $m = r^2$ a současně $m = \bar{m}^2 + \bar{n}^2 = \bar{r}^4 + \bar{s}^4$, a proto $(\bar{r}^2, \bar{s}^2, r)$ tvoří pythagorejský trojúhelník, kde délky obou odvěsen jsou čtverce. Protože $m = r^2$, platí $r < m$; současně $z = m^2 + n^2$, tedy $m < z$ a tedy také $r < z$. To ale spor s předpokladem, protože trojúhelník $(\bar{r}^2, \bar{s}^2, r)$ má přeponu menší než trojúhelník $(a^2, b^2, z)$. $\square$

## 5.4 Trojúhelníky, kde odvěsna a přepona jsou čtverce

**Věta 5.6** ([24, s. 49]). *Nechť $(x, y, z)$ je pythagorejský trojúhelník. Pak nemohou současně délky přepony a jedné odvěsny být druhou mocninou přirozených čísel.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že existují pythagorejské trojúhelníky, kde délka jedné odvěsny a délka přepony jsou druhými mocninami přirozených čísel. Z nich vezměme takový trojúhelník $(x, y, z)$, který má přeponu kratší nebo stejně dlouhou než libovolný jiný. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x = a^2$ a $z = c^2$. Pokud by $x$ a $z$ byla soudělná čísla, existovalo by přirozené číslo $d$, pro které by bylo

$$x = a^2 = d^2 a_1^2, \quad z = c^2 = d^2 c_1^2 \quad \text{a} \quad y^2 = z^2 - x^2 = d^4(c_1^2 - a_1^2).$$

Tedy $d^4 | y^2$ a $d^2 | y$, tedy $y = d^2 y_1$. Trojúhelník $(a_1^2, y_1, c_1^2)$ má menší přeponu $c_1 < z$, ale to je spor s předpokladem o trojúhelníku $(x, y, z)$. Čísla $x$ a $z$ jsou tudíž nesoudělná a trojúhelník $(x, y, z)$ je primitivní a čísla $a$ a $c$ budou nesoudělná.

Dále předpokládejme, že $y$ je sudé. Pak dle Věty 1.5 existují nesoudělná přirozená čísla $m$, $n$, $m > n$, pro která platí

$$x = a^2 = m^2 - n^2, \qquad y = 2mn, \qquad z = c^2 = m^2 + n^2.$$

Odtud odvodíme

$$a^2 c^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = m^4 - n^4,$$

neboli v trojúhelníku $(n^2, ac, m^2)$ jsou délky jedné přepony a odvěsny čtverce, navíc je délka přepony $m^2 < c^2$, což je spor s předpokladem. Za $y$ tedy musíme vzít liché číslo a $x = a^2$ je sudé číslo. Pythagorejská rovnice bude vzhledem k $y^2$ ve tvaru

$$y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 + a^2)(c^2 - a^2).$$

Jelikož v každém primitivním pythagorejském trojúhelníku je délka přepony liché číslo (viz. Lemma 2.1), je i $c$ liché. Dále $y$ je liché a $a$ je sudé číslo, proto jsou obě čísla $(c^2 + a^2)$, $(c^2 - a^2)$ lichá. Také je snadné nahlédnout, že jejich společný dělitel by musel dělit jak $c^2$, tak $a^2$, která jsou ale nesoudělná. Platí tedy, že $(c^2 + a^2)$ a $(c^2 - a^2)$ jsou lichá nesoudělná čísla a jejich součin je čtverec. Musí proto existovat přirozená lichá nesoudělná čísla $s$ a $r$, $s > r$, pro která je

$$r^2 = c^2 - a^2, \qquad s^2 = c^2 + a^2.$$

Potom máme

$$\left(\frac{s+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{s-r}{2}\right)^2 = c^2.$$

Obě čísla $(s + r)/2, (s - r)/2$ jsou přirozená a nesoudělná, protože čísla $r$ a $s$ jsou lichá a nesoudělná. Trojúhelník $((s + r)/2, (s - r)/2, c)$ je tedy primitivní a existují opět podle Věty 1.5 nesoudělná přirozená čísla $m$ a $n$, $m > n$, kde bude v případě sudého čísla $(s - r)/2$ platit

$$\frac{s+r}{2} = m^2 - n^2, \qquad \frac{s-r}{2} = 2mn \quad \text{a} \quad c = m^2 + n^2,$$

nebo

$$\frac{s+r}{2} = 2mn, \qquad \frac{s-r}{2} = m^2 - n^2 \quad \text{a} \quad c = m^2 + n^2$$

v případě, že je $(s - r)/2$ liché. V obou případech bude vyjádření $2x$ stejné, a sice

$$2x = 2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m^2 - n^2).$$

Po přeznačení $a = 2a_1$, kde $a_1$ je přirozené číslo, bude ze zápisu

$$a_1^2 = mn(m-n)(m+n)$$

a po připomenutí, že všichni činitelé jsou zde navzájem nesoudělní, patrné, že musí každý činitel sám být druhou mocninou. Existuje proto čtveřice přirozených navzájem nesoudělných čísel $k, l, p, q$, pro které je

$$m = k^2, \quad n = l^2, \quad m-n = p^2, \quad m+n = q^2$$

a platí $k^4 - l^4 = (pq)^2$. Porovnáním délek přepon původního trojúhelníku $(x, y, z)$ a trojúhelníku $(l^2, pq, k^2)$ zjistíme, že

$$k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c < c^2 = z,$$

tedy že jsme se opět dostali do sporu s předpokladem. Předpoklad, že existují trojúhelníky, jejichž délky jedné odvěsny a přepony jsou čtverce, vede ke sporu. □

**Důsledek 5.7.** *Neexistuje pythagorejský trojúhelník, který by měl za odvěsny přeponu a odvěsnu z jiného pythagorejského trojúhelníka.*

*Důkaz.* Uvažujme pythagorejský trojúhelník $(x, y, z)$ a předpokládejme, že existuje přirozené číslo $u$ takové, že $(x, z, u)$ je pythagorejský trojúhelník. Pak platí $x^2 + y^2 = z^2$ a současně $x^2 + z^2 = u^2$, a odtud plyne

$$x^4 + (uy)^2 = z^4.$$

Přepona a jedna odvěsna trojúhelníku $(x^2, uy, z^2)$ má délky odvěsny a přepony čtverec, a ten podle předchozí Věty nemůže existovat. □

# Kapitola 6

# Heronovské trojúhelníky

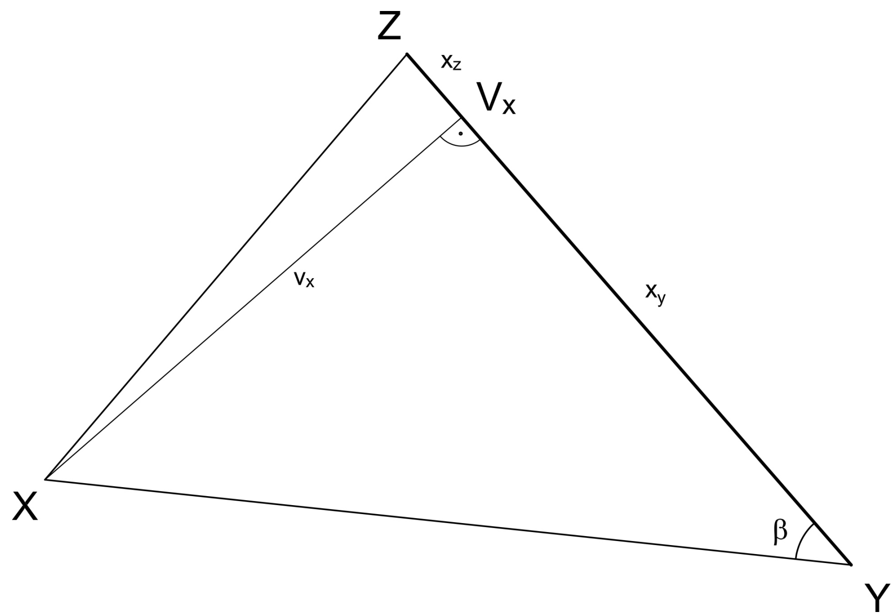
Zajímavou otázkou je, zdali existuje trojúhelník (ne nutně pravoúhlý), který má nejen přirozené délky stran, ale také výšky. Snadným příkladem trojúhelníka, který má přirozenou alespoň jednu výšku, je trojúhelník, který vznikne spojením dvou pythagorejských trojúhelníků podél jedné odvěsny, jako např. na Obrázku 6.1. Takové trojúhelníky se nazývají Heronovské a budeme je studovat v této kapitole. Heronovské trojúhelníky jsou zobecněním pythagorejských trojúhelníků, neboť mají také celočíselné délky stran a celočíselný obsah, ale nemusí být nutně pravoúhlé.

**Definice 6.1.** Trojúhelník, jehož délky stran $x$, $y$ a $z$ jsou přirozená čísla a jehož obsah $S$ je přirozené číslo, nazveme *Heronovský*.

Heronovský trojúhelník s délkami stran $x$, $y$ a $z$ budeme značit $[x, y, z]$. Díky Větě 4.3 je zřejmé, že každý pythagorejský trojúhelník má celočíselný obsah a je tudíž Heronovský.

**Lemma 6.2** ([7]). *Nechť $x$, $y$, $z$ a $k$ jsou přirozená čísla. Potom trojúhelník $[kx, ky, kz]$ je Heronovský právě tehdy, když trojúhelník $[x, y, z]$ je Heronovský.*

*Důkaz.* Označme $S$ jako obsah trojúhelníka $[x, y, z]$ a $S_1$ jako obsah trojúhelníka $[kx, ky, kz]$. Předpokládejme, že $[x, y, z]$ je Heronovský a tedy $S$ je přirozené číslo. Z Heronova vzorce pro obsahy obou trojúhelníků dostaneme, že $S_1 = k^2 S$. Odtud již plyne, že obsah $S_1$ je přirozené číslo a že $[kx, ky, kz]$ je Heronovský.




Obrázek 6.1: Rozklad Heronovského trojúhelníka na dva pythagorejské

Pro důkaz v opačném směru předpokládejme, že $S_1$ je přirozené číslo. Ze vztahu $S_1 = k^2 S$ plyne, že $S$ je přirozené, nebo racionální. Z Heronova vzorce

$$4S = \sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}$$

současně plyne, že $S$ je druhá odmocnina z přirozeného čísla, takže $S$ je přirozené nebo iracionální. Proto je trojúhelník $[x, y, z]$ Heronovský. □

**Definice 6.3.** Nechť $k$ je přirozené číslo, $[kx, ky, kz]$ a $[x, y, z]$ jsou Heronovské trojúhelníky. Trojúhelník $[x, y, z]$ se nazývá *redukovaný Heronovský trojúhelník.*

**Lemma 6.4.** *Nechť $(x_1, y_1, z_1)$ a $(x_2, y_2, z_2)$ jsou pythagorejské trojúhelníky se stejně dlouhou odvěsnou, tj. $x_1 = x_2$, a nechť $y_1 > y_2$. Pak trojúhelníky se stranami délky $z_1$, $z_2$, $y_1 + y_2$ a se stranami délky $z_1$, $z_2$, $y_1 - y_2$ jsou Heronovské.*

*Důkaz.* Z přirozenosti délek stran obou trojúhelníků přímo plyne, že obsahy jsou též přirozená čísla, neboli každý Pythagorejský trojúhelník je Heronovský. Odtud lze snadno nahlédnout, že obsah v případě součtu i rozdílu ploch je také přirozené číslo, stejně jako délka strany $y_1 + y_2$, popř $y_1 - y_2$. □

**Definice 6.5.** Heronovské trojúhelníky $[z_1, z_2, y_1 + y_2]$ a $[z_1, z_2, y_1 - y_2]$, kde $y_1 > y_2$ nazveme *kombinací* trojúhelníků $(x, y_1, z_1)$ a $(x, y_2, z_2)$ podle odvěsny $x$.

**Věta 6.6** ([7])**.** *Trojúhelník je Heronovský tehdy a jen tehdy, když je kombinací dvou pythagorejských trojúhelníků podle společné odvěsny, nebo je redukovaným Heronovským trojúhelníkem z kombinace pythagorejských trojúhelníků.*

*Důkaz.* V jednom směru je důkaz přímo důsledkem Lemmat 6.2 a 6.4. Zbývá tedy dokázat, že Heronovský trojúhelník $[x, y, z]$ je kombinací nějakých dvou pythagorejských trojúhelníků, nebo redukovaným z nějakého Heronovského trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že výška $v_x$ leží uvnitř trojúhelníka a pata výšky $V_x$ rozdělí stranu $x$ na úseky $x_y$ a $x_z$. Protože trojúhelník $[x, y, z]$ je Heronovský a platí $v_x = 2S/x$, je délka této výšky racionální číslo. Z kosinové věty $y^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos\beta$, kde $\beta$ je úhel proti straně $y$, plyne, že $\cos\beta = (x^2 + z^2 - y^2)/2xz$ je racionální číslo. Potom ale i úseky $x_y = z\cos\beta$ a $x_z = x - x_y$ jsou racionální čísla. V případě, že $v_x, x_y$ a $x_z$ jsou přirozená čísla, ukázali jsme, že Heronovský trojúhelník je kombinací pythagorejských trojúhelníků $(v_x, x_y, z)$ a $(v_x, x_z, y)$.

Pokud jsou čísla $v_x, x_y$ a $x_z$ racionální, můžeme zapsat výšku $v_x = m/n$ pro nějaká nesoudělná přirozená $m$ a $n$. Podle Lemmatu 6.2 existuje podobný Heronovský trojúhelník $[nx, ny, nz]$. V tomto trojúhelníku má výška na stranu $nx$ délku $m$, neboli přirozené číslo. V takovém trojúhelníku je úsek $nx_y = nz\cos\beta = \sqrt{n^2z^2 - m^2}$. Jeho délka je tedy současně přirozené, nebo racionální číslo ze vztahu $nz\cos\beta$ i přirozené, nebo iracionální číslo ze vztahu $\sqrt{n^2z^2 - m^2}$. Musí to tedy být přirozené číslo. Trojúhelník $[nx, ny, nz]$ je tedy kombinací $(nv_x, nx_y, nz)$ a $(nv_x, nx_z, ny)$ a trojúhelník $[x, y, z]$ je potom redukovaný z kombinace pythagorejských trojúhelníků. □

**Důsledek 6.7.** *V Heronovském trojúhelníku* $[x, y, z]$ *je velikost výšky na stranu* $x$ *racionální číslo.*

# Kapitola 7

# Získané výsledky

Cílem této práce, vedle poskytnutí přehledu o metodách reprezentace a zajímavých vlastnostech pythagorejských trojúhelníků, je předložit podklady pro tvorbu vybraných druhů úloh o pythagorejských a Heronovských trojúhelnících. Tyto trojúhelníky, aby byly použitelné ve výuce, by měli splňovat následující vlastnosti: délky stran a výšek v milimetrech jsou přirozená čísla a je možné je narýsovat na papír velikosti A3 (420 mm na 297 mm). V této kapitole shrnu výsledky mého hledání takovýchto trojúhelníků.

## 7.1 Nalezené pythagorejské trojúhelníky

V prvním kroku je třeba generovat pythagorejské trojúhelníky pomocí metod popsaných v první kapitole. Klasické značení není vhodné díky nejednoznačnosti této reprezentace – podle Věty 1.5 platí, že pro každý primitivní pythagorejský trojúhelník existuje dvojice nesoudělných přirozených čísel $m, n$, kde $m > n$, ale neplatí, že každá dvojice přirozených nesoudělných čísel $m$ a $n$, kde $m > n$, generuje právě jeden primitivní pythagorejský trojúhelník. Protipříkladem je např. dvojice $m = 3$, $n = 1$ generující obecný pythagorejský trojúhelník (8,6,10). Pro generování seznamu primitivních pythagorejských trojúhelníků je tedy klasické značení náročnější, neboť u vzniklých trojúhelníků je třeba ověřit, zda je primitivní, nebo byl nalezen ve výpočtu již dříve.

Proto jsem použil pro generování pythagorejských trojúhelníků nedostatko-přebytkové značení, a sice dvojici $(k, h)$. Podle Věty 1.7 dává toto značení jednoznačnou reprezentaci pythagorejských trojúhelníků, tj. každý pythagorejský trojúhelník lze zapsat jednoznačně pomocí dvojice $(k, h)$ a naopak každá dvojice čísel $(k, h)$ generuje právě jeden pythagorejský trojúhelník.

Pro samotné výpočty lze použít programovací jazyk, ale pro jednoduchost a možnost třídit získané výsledky jsem použil tabulkový procesor Calc. Algoritmus pro generování pythagorejských trojúhelníků je dán Větou 1.7 a lze ho zapsat následujícím způsobem:

**Krok 1:** Zvol dvojici přirozených čísel $(k, h)$.

**Krok 2:** Najdi přirozená čísla $p$ a $q$ taková, že $h = pq^2$ a $p$ neobsahuje čtverec.

**Krok 3:** Pro $p$ liché polož $d = 2pq$ a pro $p$ sudé polož $d = pq$.

**Krok 4:** Polož $x = h + dk$, $y = dk + (dk)^2/2h$ a $z = h + dk + (dk)^2/2h$.

Prvním výstupem, který lze nalézt v Příloze A v Tabulce A.1, jsou pythagorejské trojúhelníky se stranami v milimetrech, které se dají narýsovat na papír velikost A3 (o rozměrech 420 mm na 297 mm) a mají v milimetrech celočíselnou výšku na přeponu. Při hledání jsem postupoval následujícím způsobem:

**Krok 1:** Najdi všechny primitivní pythagorejské trojúhelníky $(x_0, y_0, z_0)$, kde $\min(x_0, y_0) < 297$ a $\max(x_0, y_0) < 420$.

**Krok 2:** K $(x_0, y_0, z_0)$ přiřaď $(x_1 = x_0z_0, y_1 = y_0z_0, z_1 = z_0^2)$ jako nejmenší podobný s celočíselnou výškou na přeponu. Protože $(x_0, y_0, z_0)$ je primitivní, je $x_0y_0$ a $z_0$ nesoudělné.

**Krok 3:** Vyřaď $(x_1, y_1, z_1)$ kde $\min(x_1, y_1) \geq 297$ nebo $\max(x_1, y_1) \geq 420$.

**Krok 4:** Ke každému $(x_1, y_1, z_1)$ a $i = 1, \ldots, n$ přiřaď $(ix_1, iy_1, iz_1)$ tak, aby $\min(ix_1, iy_1) < 297$ a $\max(ix_1, iy_1) < 420$.

**Krok 5:** Ke každému $(ix_1, iy_1, iz_1)$ spočítej obsah $S = i^2x_1y_1/2$, výšku $v_z = 2S/(iz_1)$ a úseky $z_x$ a $z_y$.

Celkem je takových trojúhelníků 22, z nichž nejmenší obsah má trojúhelník $(15, 20, 25)$. Jeden z trojúhelníků je podobný primitivnímu pythagorejskému trojúhelníku $(8, 15, 17)$, dva jsou podobné primitivnímu pythagorejskému trojúhelníku $(5, 12, 13)$ a ostatní jsou podobné primitivnímu pythagorejskému trojúhelníku $(3, 4, 5)$. V Tabulce A.2 je pak seznam dalších pythagorejských trojúhelníků s celočíselnou výškou na přeponu, které jsou již ale příliš velké, a nelze je narýsovat na papír o velikosti A3. Nakonec v Tabulce A.3 uvádím seznam všech primitivních pythagorejských trojúhelníků s délkami stran v milimetrech, které lze narýsovat na papír velikosti A3, ale nemají nutně celočíselnou výšku na přeponu.

## 7.2 Nalezené Heronovské trojúhelníky

Přestože pro Heronovské trojúhelníky existuje obdoba klasického značení jako u pythagorejských trojúhelníků, u důvodu větší přehlednosti jsem použil postup popsaný Větou 6.4. Pro větší přehlednost bylo také užitečné zvlášť hledat rovnoramenné Heronovské trojúhelníky a zvlášť obecné (různostranné) Heronovské trojúhelníky.

Zvolený postup pro hledání rovnoramenných Heronovských trojúhelníků, které se dají narýsovat na papír velikosti A3 zohledňuje poznatky o kombinování pythagorejský trojúhelníků z Věty 6.4, vlastnosti primitivních pythagorejských trojúhelníků z Lemmatu 1.4 a Lemmatu 1.13.

**Krok 1:** Najdi všechny primitivní pythagorejskéh trojúhelníky $(x_0, y_0, z_0)$, kde $\min(x_0, y_0) < 297$ a $\max(x_0, y_0) < 420$.

**Krok 2:** K $(x_0, y_0, z_0)$ vytvoř dva Heronovské trojúhelníky $[a, b, c]$ spojením podél odvěsen, jeden bude tvaru $[z_0, z_0, 2x_0]$ a druhý bude mít tvar $[z_0, z_0, 2y_0]$. U každého si současně poznamenej obsah $S$ a výšku na základnu $v_c$.

**Krok 3:** Vyřaď $[a, b, c]$, kde $\max(a, b, c) < \sqrt{297^2 + 420^2}$.

**Krok 4:** K $[a, b, c]$ přiřaď $[a_1, b_1, c_1]$, kde $a_1 = a^2, b_1 = b^2 = ab, c_1 = ac$ a $v_{c1} = av$ jako nejmenší podobný s celočíselnou výškou na rameno. Protože $(x_0, y_0, z_0)$ je primitivní, je $2x_0y_0 = cv_c$ a $z_0 = a$ nesoudělné.

**Krok 5:** Ke každému $[a_1, b_1, c_1]$ a $i = 1, \ldots, n$ přiřaď $[ia_1, ib_1, ic_1]$ tak, aby $\max(ia_1, ib_1, ic_1) < \sqrt{297^2 + 420^2}$..

**Krok 6:** Ke každému $[ia_1, ib_1, ic_1]$ spočítej obsah $S = i^2 c_1 v_{c1}/2$, výšku $v_a = 2S/(ia_1)$ a úseky $a_b$ a $a_c$.

Celkem se na papír velikosti A3 vejde 32 takových trojúhelníků, kde jeden vznikl jako kombinace trojúhelníku $(8, 15, 17)$, tři kombinací trojúhelníku $(5, 12, 13)$ a ostatní jako kombinace trojúhelníku $(3, 4, 5)$. Výsledky lze nalézt v Příloze B.

**Poznámka 7.1.** Rovnoramenné trojúhelníky, získané popisem výše, umožňují snadné rýsování na papír velikosti A3, neboť základna je vždy přilehlá k delší hraně papíru. Je ale možné na papír velikosti A3 narýsovat i větší Heronovské trojúhelníky, a to díky mírnému natočení. Je ale otázkou, jak vhodné jsou takovéto trojúhelníky pro účely rýsování ve školních hodinách, neboť schopnost takovéto trojúhelníky narýsovat zásadně závisí na vhodné volbě umístění tohoto trojúhelníku. Takovéto trojúhelníky lze též nalézt v Příloze B, jedná se o šest posledních trojúhelníků.

Pro hledání obecných Heronovských trojúhelníků jsem také začal od seznamu primitivních pythagorejských trojúhelníků. Pro každou jejich dvojici jsem kombinacemi podle odvěsen které se sloučí, vytvořil čtyři Heronovské trojúhelníky s racionálními výškami. V závěru postupu díky podobnosti získám opět trojúhelníky, kde jsou všechny výšky celočíselné. Na rozdíl od předchozích úloh může obecný Heronovský trojúhelník vzniknout vícekrát, je proto třeba zajistit, že se ve výstupu nebudou některé trojúhelníky opakovat. Mnou zvolená ochrana v podobě uspořádání stran a samotřídícím kontejneru měla nevýhodu ve ztrátě informace o tom, která z výšek v Heronovském trojúhelníku vzniklém kombinováním je celočíselná. Proto tedy v postupu používám obsah a výšku.

**Krok 1:** Najdi všechny primitivní pythagorejskéh trojúhelníky $(x_0, y_0, z_0)$, kde $\min(x_0, y_0) < 297$ a $\max(x_0, y_0) < 420$.

**Krok 2:** K $(x_0, y_0, z_0)$ a $(x_0', y_0', z_0')$ vytvoř čtyři Heronovské trojúhelníky $[a, b, c]$ spojením podél patřičně zvětšených odvěsen; jejich tvar je

1. $[z_0x'_0/\gcd(x_0x'_0), z'_0x_0/\gcd(x_0x'_0), (y_0x'_0 + y'_0x_0)/\gcd(x_0x'_0)]$
   a $S = (y_0x'_0 + y'_0x_0)x_0x'_0/\gcd(x_0x'_0)$,
2. $[z_0y'_0/\gcd(y_0y'_0), z'_0y_0/\gcd(y_0y'_0), (x_0y'_0 + x'_0y_0)/\gcd(y_0y'_0)]$
   a $S = (x_0y'_0 + x'_0y_0)y_0y'_0/\gcd(y_0y'_0)$,
3. $[z_0x'_0/\gcd(y_0x'_0), z'_0y_0/\gcd(y_0x'_0), (x_0x'_0 + y'_0y_0)/\gcd(y_0x'_0)]$
   a $S = (x_0x'_0 + y'_0y_0)y_0x'_0/\gcd(y_0x'_0)$,
4. $[z_0y'_0/\gcd(x_0y'_0), z'_0x_0/\gcd(x_0y'_0), (y_0y'_0 + x'_0x_0)/\gcd(x_0y'_0)]$
   a $S = (y_0y'_0 + x'_0x_0)x_0y'_0/\gcd(x_0y'_0)$.

**Krok 3:** Vyřaď $[a, b, c]$, kde $\max(a, b, c) \geq \sqrt{297^2 + 420^2}$.

**Krok 4:** K $[a, b, c]$ vypočítej potřebné zvětšení

$$k = \frac{a}{\gcd(a, 2S)} \frac{b}{\gcd(b, 2S)} \frac{c}{\gcd(c, 2S)}$$

a přiřaď trojúhelník $[a_1, b_1, c_1]$, kde $a_1 = ka, b_1 = kb$ a $c_1 = kc$.

**Krok 5:** Ke každému $[a_1, b_1, c_1]$ spočítej výšky $v_{a1} = 2S/a_1$, $v_{b1} = 2S/b_1$ a $v_{c1} = 2S/c_1$.

**Krok 6:** Vyřaď $[a_1, b_1, c_1]$, kde $\max(a_1, b_1, c_1) \geq \sqrt{297^2 + 420^2}$.

Celkem se na papír velikosti A3 vejdou pouze 5 takových trojúhelníků, vzniklých kombinací trojúhelníků $(3, 4, 5)$ a $(27, 7, 25)$. Nejmenší z těchto trojúhelníků má v milimetrech rozměry $[35, 75, 100]$. Rozměry nalezených Heronovských trojúhelníků, které se dají narýsovat na A3 lze nalézt v Příloze C v Tabulce C.1.

**Poznámka 7.2.** Obecný Heronovský trojúhelník, který se dá narýsovat na papír velikosti A3 a nemá nejdelší stranu rovnoběžnou s nejdelší stranou papíru je jediný. Jedná se o trojúhelník $[175, 375, 500]$ a nalézt ho lze v Příloze C v Tabulce C.1 jako poslední.

# Závěr

Cíl práce bylo shromáždit poznatky o vlastnostech pythagorejských trojúhelníků. Tento cíl se podařilo naplnit. Již při tvorbě práce se ukázaly nabyté znalosti jako užitečné. Speciálně poznatky o vlastnostech stran pythagorejských trojúhelníků a věty o počtech pythagorejských trojúhelníků s danou délkou strany mi umožnily snadněji tvořit úlohy.

Také se mi podařilo nalézt všechny trojúhelníky s celočíselnými délkami stran a výšek, které jdou narýsovat na papír o rozměrech formátu A3. Přes jejich malý počet se ukázaly jako užitečné nejen při rýsování trojúhelníků, ale po vhodném doplnění se daly použít pro úlohy o rýsování rovnoběžníků ze strany a výšky, rýsování kosočtverců z úhlopříček, nebo rýsování lichoběžníků. Pro početní úlohy je také výhoda v množství různých pythagorejských trojúhelníků proti v cvičebnicích často užívanému $(3, 4, 5)$.

Kromě nalezených trojúhelníků je přínosem také nedostatko-přebytkové značení, které jsem v české literatuře nenalezl. Ukázalo se totiž jako názornější pro popis pythagorejských trojúhelníků než klasické značení, tak užitečnější pro jejich generování.

Pro možné rozšíření práce se nabízí hned několik témat. Prvním by mohl být sborník s úlohami, zaměřený na předvedené vlastnosti, i když by úlohy byly vhodné spíše do matematických olympiád, než do běžné výuky. Dalším rozšířením by mohlo být nalezení kvádru, kde by všechny délky hran a uhlopříček byly celočíselné. Jinou možností rozšíření práce by mohl být úplný přehled použitých zápisů a způsobů generování pythagorejských trojúhelníků. V tomto směru bych se rád vrátil ke generování pythagorejských trojúhelníků ze smíšených čísel, nebo se blíže seznámil se zápisem pomocí kmenových zlomků, užívaných ve starověkém Egyptě.

# Literatura


[1] R. C. Alperin. The modular tree of pythagoras. *American Mathematical Monthly*, pages 807–816, 2005.

[2] H. W. Austin and J. W. Austin. On a special set of symmetric pythagorean triple preserving matrices. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 12(2):97–104, 2012.

[3] A. Baragar. *A Survey of Classical and Modern Geometries: With Computer Activities.* Prentice Hall, 2001.

[4] F. Barning. On pythagorean and quasi-pythagorean triangles and a generation process with the help of unimodular matrices. *Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk., ZW-011*, 1963.

[5] P. Braza, J. Tong, and M.-Q. Zhan. Linear transformations on pythagorean triples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5):755–762, 2004.

[6] D. M. Burton. *The History of Mathematics.* Wm. C. Brown, 1972.

[7] J. R. Carlson. Determination of Heronian triangles. *Fibonacci Quarterly*, 8:499–506, 1970.

[8] C. B. Dawson. The ring of pythagorean triples. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 6:72–77, 1994.

[9] L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers, Volume II: Diophantine Analysis*, volume 2. Courier Corporation, 2013.

[10] I. Fine and T. J. Osler. The remarkable incircle of a triangle. *Mathematics and Computer Education*, 35(1):44–50, 2001.

[11] A. Hall. Genealogy of pythagorean triads. *Mathematical Gazette*, 54(390):377–379, 1970.

[12] B. Hall and T. Rowland. The classical form of pythagorean triples. *The Mathematical Gazette*, 81(491):270–272, 1997.

[13] W. J. Hildebrand. Generalized pythagorean triples. *The College Mathematics Journal*, 16(1):48–52, 1985.

[14] D. E. Joyce. *Euclid's elements.* Clark University, Department of Mathematics and Computer Science, 1998.

[15] A. Kanga. The family tree of pythagorean triples. *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 26:15–17, 1990.

[16] H. Klostergaard. Tabulating all pythagorean triples. *Mathematics Magazine*, pages 226–227, 1978.

[17] D. McCullough. Height and excess of pythagorean triples. *Mathematics Magazine*, pages 26–44, 2005.

[18] D. McCullough and E. Wade. Recursive enumeration of Pythagorean triples. *College Mathematics Journal*, 34(2):107–111, 2003.

[19] B. Moshan. Primitive pythagorean triples. *The Mathematics Teacher*, pages 541–545, 1959.

[20] L. Palmer, M. Ahuja, and M. Tikoo. Finding pythagorean triple preserving matrices. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 10:99–105, 1998.

[21] A. S. Posamentier. *The Pythagorean Theorem: The Story of Its Power and Beauty*. Prometheus Books, 2010.

[22] N. Robbins. On the number of primitive pythagorean triangles with a given inradius. *Fibonnaci Quaterly*, 44(4), 2006.

[23] J. Rukavicka. Dickson's method for generating pythagorean triples revisited. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(3):363–364, 2013.

[24] W. Sierpiński. *Pythagorean triangles*. Dover Publications, Inc., 2003.

[25] M. Teigen and D. Hadwin. On generating Pythagorean triples. *American Mathematical Monthly*, pages 378–379, 1971.

[26] M. Tikoo. A note on pythagorean triple preserving matrices. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(6):893–894, 2002.

[27] A. Wayne. A genealogy of 120° and 60° natural triangles. *Mathematics Magazine*, pages 157–162, 1982.

[28] M. Wojtowicz. Algebraic structures of some sets of Pythagorean triples, II. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 13:17–23, 2001.

[29] J. Zhouf. Kružnice v pythagorejském trojúhelníku, 2012.

# Příloha A

# Pythagorejské trojúhelníky

V této Příloze předkládám tabulky pythagorejských trojúhelníků s celočíselnými výškami (Tabulky A.1 a A.2) a tabulku primitivních pythagorejských trojúhelníků (Tabulka A.3). Užíváme následující značení:

- $(x, y, z)$: pythagorejský trojúhelník
- $S$: obsah pythagorejského trojúhelníka
- $v_z$: délka výšky na stranu $z$
- Prim: kterému primitivnímu p.t. je $(x, y, z)$ podobný
- GCD: koeficient podobnosti
- $z_x$: vzdálenost mezi vrcholem $X$ a patou výšky $V_z$
- $z_y$: vzdálenost mezi vrcholem $Y$ a patou výšky $V_z$
- $k, h, q$: čísla z nedostatko-přebytkového značení z Věty 1.7
- Form: nejmenší formát, na který již trojúhelník lze narýsovat

| $(x, y, z)$ | $S$ | $v_z$ | GCD | Prim | $z_x$ | $z_y$ | $k$ | $h$ | Form |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (15, 20, 25) | 150 | 12 | 5 | (3, 4, 5) | 9 | 16 | 1 | 5 | A10 |
| (30, 40, 50) | 600 | 24 | 10 | (3, 4, 5) | 18 | 32 | 2 | 10 | A9 |
| (45, 60, 75) | 1 350 | 36 | 15 | (3, 4, 5) | 27 | 48 | 1 | 15 | A8 |
| (60, 80, 100) | 2 400 | 48 | 20 | (3, 4, 5) | 36 | 64 | 2 | 20 | A7 |
| (75, 100, 125) | 3 750 | 60 | 25 | (3, 4, 5) | 45 | 80 | 5 | 25 | A6 |
| (90, 120, 150) | 5 400 | 72 | 30 | (3, 4, 5) | 54 | 96 | 2 | 30 | A6 |
| (65, 156, 169) | 5 070 | 60 | 13 | (5, 12, 13) | 25 | 144 | 2 | 13 | A5 |
| (105, 140, 175) | 7 350 | 84 | 35 | (3, 4, 5) | 63 | 112 | 1 | 35 | A5 |
| (120, 160, 200) | 9 600 | 96 | 40 | (3, 4, 5) | 72 | 128 | 4 | 40 | A5 |
| (135, 180, 225) | 12 150 | 108 | 45 | (3, 4, 5) | 81 | 144 | 3 | 45 | A5 |
| (150, 200, 250) | 15 000 | 120 | 50 | (3, 4, 5) | 90 | 160 | 10 | 50 | A4 |
| (165, 220, 275) | 18 150 | 132 | 55 | (3, 4, 5) | 99 | 176 | 1 | 55 | A4 |
| (136, 255, 289) | 17 340 | 120 | 17 | (8, 15, 17) | 64 | 225 | 3 | 34 | A4 |
| (180, 240, 300) | 21 600 | 144 | 60 | (3, 4, 5) | 108 | 192 | 2 | 60 | A4 |
| (195, 260, 325) | 25 350 | 156 | 65 | (3, 4, 5) | 117 | 208 | 1 | 65 | A4 |
| (130, 312, 338) | 20 280 | 120 | 26 | (5, 12, 13) | 50 | 288 | 4 | 26 | A3 |
| (210, 280, 350) | 29 400 | 168 | 70 | (3, 4, 5) | 126 | 224 | 2 | 70 | A3 |
| (225, 300, 375) | 33 750 | 180 | 75 | (3, 4, 5) | 135 | 240 | 5 | 75 | A3 |
| (240, 320, 400) | 38 400 | 192 | 80 | (3, 4, 5) | 144 | 256 | 4 | 80 | A3 |
| (255, 340, 425) | 43 350 | 204 | 85 | (3, 4, 5) | 153 | 272 | 1 | 85 | A3 |
| (270, 360, 450) | 48 600 | 216 | 90 | (3, 4, 5) | 162 | 288 | 6 | 90 | A3 |
| (285, 380, 475) | 54 150 | 228 | 95 | (3, 4, 5) | 171 | 304 | 1 | 95 | A3 |

Tabulka A.1: Pythagorejské trojúhelníky s celočíselnými délkami stran a celočíselnými výškami, které lze narýsovat na papír velikosti A3 (délky stran v mm).

| $(x, y, z)$ | $S$ | $v_z$ | GCD | Prim | $v_x$ | $v_y$ | $k$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (300, 400, 500) | 60 000 | 240 | 100 | (3, 4, 5) | 180 | 320 | 10 | 100 |
| (195, 468, 507) | 45 630 | 180 | 39 | (5, 12, 13) | 75 | 432 | 2 | 39 |
| (315, 420, 525) | 66 150 | 252 | 105 | (3, 4, 5) | 189 | 336 | 1 | 105 |
| (330, 440, 550) | 72 600 | 264 | 110 | (3, 4, 5) | 198 | 352 | 2 | 110 |
| (345, 460, 575) | 79 350 | 276 | 115 | (3, 4, 5) | 207 | 368 | 1 | 115 |
| (272, 510, 578) | 69 360 | 240 | 34 | (8, 15, 17) | 128 | 450 | 3 | 68 |
| (360, 480, 600) | 86 400 | 288 | 120 | (3, 4, 5) | 216 | 384 | 4 | 120 |
| (375, 500, 625) | 93 750 | 300 | 125 | (3, 4, 5) | 225 | 400 | 5 | 125 |
| (175, 600, 625) | 52 500 | 168 | 25 | (7, 24, 25) | 49 | 576 | 15 | 25 |
| (390, 520, 650) | 101 400 | 312 | 130 | (3, 4, 5) | 234 | 416 | 2 | 130 |
| (405, 540, 675) | 109 350 | 324 | 135 | (3, 4, 5) | 243 | 432 | 3 | 135 |
| (260, 624, 676) | 81 120 | 240 | 52 | (5, 12, 13) | 100 | 576 | 4 | 52 |
| (420, 560, 700) | 117 600 | 336 | 140 | (3, 4, 5) | 252 | 448 | 2 | 140 |
| (435, 580, 725) | 126 150 | 348 | 145 | (3, 4, 5) | 261 | 464 | 1 | 145 |
| (450, 600, 750) | 135 000 | 360 | 150 | (3, 4, 5) | 270 | 480 | 10 | 150 |
| (465, 620, 775) | 144 150 | 372 | 155 | (3, 4, 5) | 279 | 496 | 1 | 155 |
| (480, 640, 800) | 153 600 | 384 | 160 | (3, 4, 5) | 288 | 512 | 8 | 160 |
| (495, 660, 825) | 163 350 | 396 | 165 | (3, 4, 5) | 297 | 528 | 1 | 165 |
| (580, 609, 841) | 176 610 | 420 | 29 | (20, 21, 29) | 400 | 441 | 3 | 232 |
| (325, 780, 845) | 126 750 | 300 | 65 | (5, 12, 13) | 125 | 720 | 2 | 65 |
| (510, 680, 850) | 173 400 | 408 | 170 | (3, 4, 5) | 306 | 544 | 2 | 170 |
| (408, 765, 867) | 156 060 | 360 | 51 | (8, 15, 17) | 192 | 675 | 3 | 102 |
| (525, 700, 875) | 183 750 | 420 | 175 | (3, 4, 5) | 315 | 560 | 5 | 175 |
| (540, 720, 900) | 194 400 | 432 | 180 | (3, 4, 5) | 324 | 576 | 6 | 180 |
| (555, 740, 925) | 205 350 | 444 | 185 | (3, 4, 5) | 333 | 592 | 1 | 185 |
| (570, 760, 950) | 216 600 | 456 | 190 | (3, 4, 5) | 342 | 608 | 2 | 190 |
| (585, 780, 975) | 228 150 | 468 | 195 | (3, 4, 5) | 351 | 624 | 1 | 195 |
| (600, 800, 1 000) | 240 000 | 480 | 200 | (3, 4, 5) | 360 | 640 | 20 | 200 |

Tabulka A.2: Pythagorejské trojúhelníky s celočíselnými délkami stran a celočíselnými výškami, které již nelze narýsovat na papír velikosti A3 (délky stran v mm).

| $x$ | $y$ | $z$ | $k$ | $q$ | $x$ | $y$ | $z$ | $k$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 171 | 140 | 221 | 5 | 9 |
| 15 | 8 | 17 | 1 | 3 | 231 | 160 | 281 | 5 | 11 |
| 35 | 12 | 37 | 1 | 5 | 299 | 180 | 349 | 5 | 13 |
| 63 | 16 | 65 | 1 | 7 | 13 | 84 | 85 | 6 | 1 |
| 99 | 20 | 101 | 1 | 9 | 85 | 132 | 157 | 6 | 5 |
| 143 | 24 | 145 | 1 | 11 | 133 | 156 | 205 | 6 | 7 |
| 195 | 28 | 197 | 1 | 13 | 253 | 204 | 325 | 6 | 11 |
| 255 | 32 | 257 | 1 | 15 | 325 | 228 | 397 | 6 | 13 |
| 323 | 36 | 325 | 1 | 17 | 15 | 112 | 113 | 7 | 1 |
| 399 | 40 | 401 | 1 | 19 | 51 | 140 | 149 | 7 | 3 |
| 5 | 12 | 13 | 2 | 1 | 95 | 168 | 193 | 7 | 5 |
| 21 | 20 | 29 | 2 | 3 | 207 | 224 | 305 | 7 | 9 |
| 45 | 28 | 53 | 2 | 5 | 275 | 252 | 373 | 7 | 11 |
| 77 | 36 | 85 | 2 | 7 | 351 | 280 | 449 | 7 | 13 |
| 117 | 44 | 125 | 2 | 9 | 17 | 144 | 145 | 8 | 1 |
| 165 | 52 | 173 | 2 | 11 | 57 | 176 | 185 | 8 | 3 |
| 221 | 60 | 229 | 2 | 13 | 105 | 208 | 233 | 8 | 5 |
| 285 | 68 | 293 | 2 | 15 | 161 | 240 | 289 | 8 | 7 |
| 357 | 76 | 365 | 2 | 17 | 225 | 272 | 353 | 8 | 9 |
| 7 | 24 | 25 | 3 | 1 | 297 | 304 | 425 | 8 | 11 |
| 55 | 48 | 73 | 3 | 5 | 19 | 180 | 181 | 9 | 1 |
| 91 | 60 | 109 | 3 | 7 | 115 | 252 | 277 | 9 | 5 |
| 187 | 84 | 205 | 3 | 11 | 175 | 288 | 337 | 9 | 7 |
| 247 | 96 | 265 | 3 | 13 | 21 | 220 | 221 | 10 | 1 |
| 391 | 120 | 409 | 3 | 17 | 69 | 260 | 269 | 10 | 3 |
| 9 | 40 | 41 | 4 | 1 | 189 | 340 | 389 | 10 | 7 |
| 33 | 56 | 65 | 4 | 3 | 261 | 380 | 461 | 10 | 9 |
| 65 | 72 | 97 | 4 | 5 | 23 | 264 | 265 | 11 | 1 |
| 105 | 88 | 137 | 4 | 7 | 75 | 308 | 317 | 11 | 3 |
| 153 | 104 | 185 | 4 | 9 | 135 | 352 | 377 | 11 | 5 |
| 209 | 120 | 241 | 4 | 11 | 203 | 396 | 445 | 11 | 7 |
| 273 | 136 | 305 | 4 | 13 | 25 | 312 | 313 | 12 | 1 |
| 345 | 152 | 377 | 4 | 15 | 145 | 408 | 433 | 12 | 5 |
| 11 | 60 | 61 | 5 | 1 | 27 | 364 | 365 | 13 | 1 |
| 39 | 80 | 89 | 5 | 3 | 87 | 416 | 425 | 13 | 3 |
| 119 | 120 | 169 | 5 | 7 | 29 | 420 | 421 | 14 | 1 |

Tabulka A.3: Primitivní pythagorejské trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, které lze narýsovat na papír velikosti A3 (délky stran v mm).

# Příloha B

# Rovnoramenné Heronovské trojúhelníky

V této příloze lze nalézt rovnoramenné Heronovské trojúhelníky, které mají celočíselné výšky. Užíváme následující značení:

- $[x, y, z]$: Heronovský trojúhelník
- $S$: obsah Heronovského trojúhelníka
- $v_z$: délka výšky na základnu $z$
- komb: kombinací kterých primitivních $(a, b, c)$ podle strany $b$ $[x, y, z]$ vznikl
- $v_x$: délka výšky na stranu $x$
- $x_y$: vzdálenost mezi vrcholem $Y$ a patou výšky $v_x$
- $x_y$ prim: primitivní k $(x_y, v_x, y)$
- $x_z$: vzdálenost mezi vrcholem $Z$ a patou výšky $v_x$
- $x_z$ prim: primitivní k $(x_z, v_x, z)$
- Form: nejmenší formát, na který již trojúhelník lze narýsovat

| $[x, y, z]$ | $S$ | $v_z$ | komb | $v_x$ | $x_y$ | $x_y$ prim | $x_z$ | $x_z$ prim | Form |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[25, 25, 30]$ | 300 | 20 | (3, 4, 5) | 24 | 7 | (7, 24, 25) | 18 | (3, 4, 5) | A10 |
| $[25, 25, 40]$ | 300 | 15 | (4, 3, 5) | 24 | 7 | (7, 24, 25) | 32 | (4, 3, 5) | A9 |
| $[50, 50, 60]$ | 1 200 | 40 | (3, 4, 5) | 48 | 14 | (7, 24, 25) | 36 | (3, 4, 5) | A8 |
| $[50, 50, 80]$ | 1 200 | 30 | (4, 3, 5) | 48 | 14 | (7, 24, 25) | 64 | (4, 3, 5) | A7 |
| $[75, 75, 90]$ | 2 700 | 60 | (3, 4, 5) | 72 | 21 | (7, 24, 25) | 54 | (3, 4, 5) | A7 |
| $[100, 100, 120]$ | 4 800 | 80 | (3, 4, 5) | 96 | 28 | (7, 24, 25) | 72 | (3, 4, 5) | A6 |
| $[75, 75, 120]$ | 2 700 | 45 | (4, 3, 5) | 72 | 21 | (7, 24, 25) | 96 | (4, 3, 5) | A6 |
| $[169, 169, 130]$ | 10 140 | 156 | (5, 12, 13) | 120 | 119 | (119, 120, 169) | 50 | (5, 12, 13) | A5 |
| $[125, 125, 150]$ | 7 500 | 100 | (3, 4, 5) | 120 | 35 | (7, 24, 25) | 90 | (3, 4, 5) | A5 |
| $[100, 100, 160]$ | 4 800 | 60 | (4, 3, 5) | 96 | 28 | (7, 24, 25) | 128 | (4, 3, 5) | A5 |
| $[150, 150, 180]$ | 10 800 | 120 | (3, 4, 5) | 144 | 42 | (7, 24, 25) | 108 | (3, 4, 5) | A5 |
| $[125, 125, 200]$ | 7 500 | 75 | (4, 3, 5) | 120 | 35 | (7, 24, 25) | 160 | (4, 3, 5) | A5 |
| $[175, 175, 210]$ | 14 700 | 140 | (3, 4, 5) | 168 | 49 | (7, 24, 25) | 126 | (3, 4, 5) | A4 |
| $[200, 200, 240]$ | 19 200 | 160 | (3, 4, 5) | 192 | 56 | (7, 24, 25) | 144 | (3, 4, 5) | A4 |
| $[150, 150, 240]$ | 10 800 | 90 | (4, 3, 5) | 144 | 42 | (7, 24, 25) | 192 | (4, 3, 5) | A4 |
| $[338, 338, 260]$ | 40 560 | 312 | (5, 12, 13) | 240 | 238 | (119, 120, 169) | 100 | (5, 12, 13) | A3 |
| $[225, 225, 270]$ | 24 300 | 180 | (3, 4, 5) | 216 | 63 | (7, 24, 25) | 162 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[289, 289, 272]$ | 34 680 | 255 | (8, 15, 17) | 240 | 161 | (161, 240, 289) | 128 | (8, 15, 17) | A3 |
| $[175, 175, 280]$ | 14 700 | 105 | (4, 3, 5) | 168 | 49 | (7, 24, 25) | 224 | (4, 3, 5) | A4 |
| $[250, 250, 300]$ | 30 000 | 200 | (3, 4, 5) | 240 | 70 | (7, 24, 25) | 180 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[169, 169, 312]$ | 10 140 | 65 | (12, 5, 13) | 120 | 119 | (119, 120, 169) | 288 | (12, 5, 13) | A3 |
| $[200, 200, 320]$ | 19 200 | 120 | (4, 3, 5) | 192 | 56 | (7, 24, 25) | 256 | (4, 3, 5) | A3 |
| $[275, 275, 330]$ | 36 300 | 220 | (3, 4, 5) | 264 | 77 | (7, 24, 25) | 198 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[300, 300, 360]$ | 43 200 | 240 | (3, 4, 5) | 288 | 84 | (7, 24, 25) | 216 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[225, 225, 360]$ | 24 300 | 135 | (4, 3, 5) | 216 | 63 | (7, 24, 25) | 288 | (4, 3, 5) | A3 |
| $[250, 250, 400]$ | 30 000 | 150 | (4, 3, 5) | 240 | 70 | (7, 24, 25) | 320 | (4, 3, 5) | A3 |
| $[275, 275, 440]$ | 36 300 | 165 | (4, 3, 5) | 264 | 77 | (7, 24, 25) | 352 | (4, 3, 5) | A3 |
| $[300, 300, 480]$ | 43 200 | 180 | (4, 3, 5) | 288 | 84 | (7, 24, 25) | 384 | (4, 3, 5) | A3 |
| $[325, 325, 390]$ | 50 700 | 260 | (3, 4, 5) | 312 | 91 | (7, 24, 25) | 234 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[350, 350, 420]$ | 58 800 | 280 | (3, 4, 5) | 336 | 98 | (7, 24, 25) | 252 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[375, 375, 450]$ | 67 500 | 300 | (3, 4, 5) | 360 | 105 | (7, 24, 25) | 270 | (3, 4, 5) | A3 |
| $[400, 400, 480]$ | 76 800 | 320 | (3, 4, 5) | 384 | 112 | (7, 24, 25) | 288 | (3, 4, 5) | A3 |

Tabulka B.1: Rovnoramenné Heronovské trojúhelníky s celočíselnými výškami, které lze narýsovat na papír velikosti A3 (délky stran v mm).

# Příloha C

# Obecné Hernovské trojúhelníky

V teto příloze lze nalézt obecné Heronovské trojúhelníky, které mají celočíselné výšky. Užíváme následující značení:

- $[x, y, z]$: Heronovský trojúhelník
- $S$: obsah Heronovského trojúhelníka
- $v_x$: délka výšky na stranu $x$
- $v_x y$ prim: primitivní k $(x_y, v_x, y)$
- $v_x z$ prim: primitivní k $(x_z, v_x, z)$
- $v_y$: délka výšky na stranu $y$
- $v_y x$ prim: primitivní k $(y_x, v_y, x)$
- $v_y z$ prim: primitivní k $(y_z, v_y, z)$
- $v_z$: délka výšky na stranu $z$
- $v_z x$ prim: primitivní k $(z_x, v_z, x)$
- $v_z y$ prim: primitivní k $(z_y, v_z, y)$
- Form: nejmenší formát, na který již trojúhelník lze narýsovat

| $[x, y, z]$ | $S$ | $v_x$ | $v_x y$ prim | $v_x z$ prim | $v_y$ | $v_y x$ prim | $v_y z$ prim | $v_z$ | $v_z x$ prim | $v_z y$ prim | Form |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[35, 75, 100]$ | 1 050 | 60 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 28 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 21 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) | A7 |
| $[70, 150, 200]$ | 4 200 | 120 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 56 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 42 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) | A5 |
| $[105, 225, 300]$ | 9 450 | 180 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 84 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 63 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) | A3 |
| $[140, 300, 400]$ | 16 800 | 240 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 112 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 84 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) | A3 |
| $[175, 375, 500]$ | 26 250 | 300 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 140 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 105 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) | A3 |

Tabulka C.1: Obecné Hernovské trojúhelníky trojúhelníky s celočíselnými výškami, které lze narýsovat na papír velikosti A3 (délky stran v mm).

| $[x, y, z]$ | $S$ | $v_x$ | $v_x y$ prim | $v_x z$ prim | $v_y$ | $v_y x$ prim | $v_y z$ prim | $v_z$ | $v_z x$ prim | $v_z y$ prim |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[210, 450, 600]$ | 37 800 | 360 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 168 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 126 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[245, 525, 700]$ | 51 450 | 420 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 196 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 147 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[280, 600, 800]$ | 67 200 | 480 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 224 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 168 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[275, 625, 750]$ | 82 500 | 600 | (7, 24, 25) | (3, 4, 5) | 264 | (7, 24, 25) | (117, 44, 125) | 220 | (3, 4, 5) | (117, 44, 125) |
| $[315, 675, 900]$ | 85 050 | 540 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 252 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 189 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[260, 845, 975]$ | 101 400 | 780 | (5, 12, 13) | (3, 4, 5) | 240 | (5, 12, 13) | (63, 16, 65) | 208 | (3, 4, 5) | (63, 16, 65) |
| $[350, 750, 1000]$ | 105 000 | 600 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 280 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 210 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[385, 825, 1100]$ | 127 050 | 660 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 308 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 231 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[420, 900, 1200]$ | 151 200 | 720 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 336 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 252 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[455, 975, 1300]$ | 177 450 | 780 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 364 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 273 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[490, 1050, 1400]$ | 205 800 | 840 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 392 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 294 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[525, 1125, 1500]$ | 236 250 | 900 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 420 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 315 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[765, 850, 1445]$ | 260 100 | 680 | (3, 4, 5) | (15, 8, 17) | 612 | (3, 4, 5) | (77, 36, 85) | 360 | (15, 8, 17) | (77, 36, 85) |
| $[560, 1200, 1600]$ | 268 800 | 960 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 448 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 336 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[715, 845, 1300]$ | 278 850 | 780 | (5, 12, 13) | (4, 3, 5) | 660 | (5, 12, 13) | (56, 33, 65) | 429 | (4, 3, 5) | (56, 33, 65) |
| $[875, 1100, 1875]$ | 288 750 | 660 | (4, 3, 5) | (117, 44, 125) | 525 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) | 308 | (117, 44, 125) | (24, 7, 25) |
| $[625, 975, 1000]$ | 292 500 | 936 | (7, 24, 25) | (44, 117, 125) | 600 | (7, 24, 25) | (4, 3, 5) | 585 | (44, 117, 125) | (4, 3, 5) |
| $[595, 1275, 1700]$ | 303 450 | 1 020 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 476 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 357 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[630, 1350, 1800]$ | 340 200 | 1 080 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 504 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 378 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[845, 910, 975]$ | 354 900 | 840 | (5, 12, 13) | (33, 56, 65) | 780 | (5, 12, 13) | (3, 4, 5) | 728 | (33, 56, 65) | (3, 4, 5) |
| $[665, 1425, 1900]$ | 379 050 | 1 140 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 532 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 399 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[700, 1500, 2000]$ | 420 000 | 1 200 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 560 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 420 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |
| $[735, 1575, 2100]$ | 463 050 | 1 260 | (3, 4, 5) | (4, 3, 5) | 588 | (3, 4, 5) | (24, 7, 25) | 441 | (4, 3, 5) | (24, 7, 25) |

Tabulka C.2: Obecné Hernovské trojúhelníky trojúhelníky s celočíselnými výškami, které již nelze narýsovat na papír velikosti A3 (délky stran v mm).